ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

Лекция 2.4 «Астигматические линзы»

ВВЕДЕНИЕ. АСТИГМАТИЗМ КАК ОПТИЧЕСКИЙ ФЕНОМЕН И ЗАДАЧА ЕГО КОРРЕКЦИИ

В геометрической и прикладной оптике фундаментальным свойством стигматической системы является способность отображать светящуюся точку пространства предметов в точку пространства изображений. Однако при нарушении осевой симметрии оптических поверхностей или при прохождении светового пучка через поверхности с различной кривизной во взаимно перпендикулярных плоскостях возникает явление **астигматизма** (от греч. *a-* — отрицание, *stigma, stigmatos* — точка, букв. «бесточечность»).

В офтальмологической практике астигматизм глаза представляет собой распространенную аметропию, обусловленную асферичностью (нерегулярной кривизной) роговицы или хрусталика. В такой оптической системе преломляющая сила в одном меридиональном сечении превосходит преломляющую силу в другом, взаимно перпендикулярном сечении. В результате гомоцентрический пучок света, отраженный от удаленного точечного объекта, деформируется и не формирует резкого точечного фокуса на сетчатке.

Единственным эффективным оптическим средством компенсации регулярного астигматизма глаза являются **астигматические линзы**.

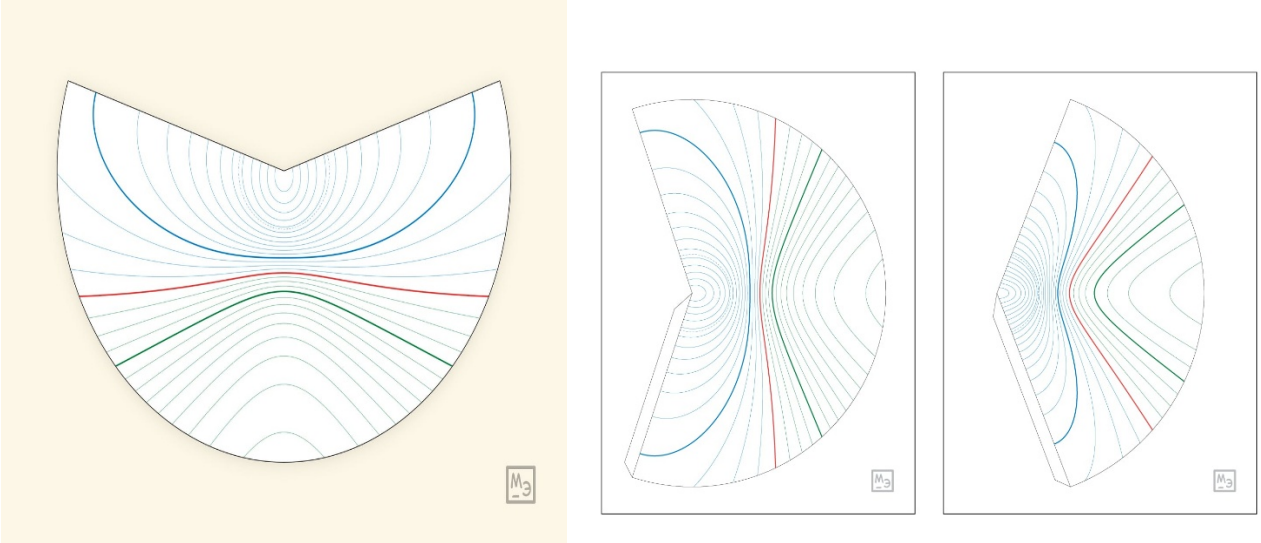
Астигматическая линза — это оптическая деталь из прозрачного однородного материала, обладающая различной преломляющей способностью (оптической силой) в двух взаимно перпендикулярных главных сечениях, предназначенная для преобразования астигматического пучка света в стигматический либо для компенсации астигматической разности оптической системы глаза.

Настоящая лекция посвящена детальному физико-математическому исследованию структуры астигматического пучка лучей (коноида Штурма), классификации цилиндрических и торических поверхностей, математическому аппарату транспозиции рецептов и расчету параметров астигматических очковых линз в соответствии со стандартами **ГОСТ 7427-78** и **ГОСТ Р 51044-97 (ISO 13666)**.

1. СТРУКТУРА АСТИГМАТИЧЕСКОГО СВЕТОВОГО ПУЧКА. КОНОИД ШТУРМА

Для понимания действия астигматической линзы необходимо строго проанализировать трансформацию гомоцентрического пучка лучей, испытавшего преломление через бессимметричный оптический элемент с оптическими силами D_1 и D_2 в главных сечениях ($D_1 \neq D_2$).

Рис. 1. Эволюция поперечного сечения светового пучка в коноиде Штурма: переход от эллипса к первой фокальной линии, кругу наименьшего рассеяния и второй фокальной линии.



1.1. Коноид Штурма: морфология и топология сечений

Геометрическое тело, образованное световыми лучами астигматического пучка при распространении вдоль оптической оси Z, носит название **коноида Штурма** (в честь французского математика Шарля Штурма, исследовавшего дифференциальную геометрию поверхностей в 1838 г.).

Пусть главное сечение I (меридиональное) обладает большей преломляющей силой D_1, а главное сечение II (экваториальное) — меньшей преломляющей силой D_2 ($D_1 > D_2$). Соответственно, задние фокусные расстояния подчиняются обратному неравенству: $f'_1 < f'_2$.

При перемещении сечения вдоль оптической оси Z от линзы к бесконечности наблюдаются следующие метаморфозы волнового фронта и геометрического пятна:

ЭВОЛЮЦИЯ СЕЧЕНИЯ КОНОИДА ШТУРМА ПО ХОДУ ЛУЧА:
1. z < f'1: Поперечное сечение имеет форму горизонтально вытянутого эллипса.
↓
2. z = f'1: ПЕРВАЯ ФОКАЛЬНАЯ ЛИНИЯ ШТУРМА (F'1):
Лучи сечения I сошлись в точку, лучи сечения II еще сходятся.
Сечение вырождается в вертикальный прямолинейный отрезок.
↓
3. f'1 < z < z_K: Сечение представляет собой эллипс, вытянутый по вертикали.
↓
4. z = z_K: КРУГ НАИМЕНЬШЕГО РАССЕЯНИЯ (КНР):
Высота и ширина сечения строго равны. Формируется круглое пятно,
где достигается субъективно наилучшая резкость зрения.
↓
5. z_K < z < f'2: Сечение вновь становится вертикальным эллипсом, сжимающимся по вертикали.
↓
6. z = f'2: ВТОРАЯ ФОКАЛЬНАЯ ЛИНИЯ ШТУРМА (F'2):
Лучи сечения II сходятся в точку, лучи сечения I уже разошлись.
Сечение представляет собой горизонтальный прямолинейный отрезок.

↓
7. z > f'2: Сечение представляет собой расширяющийся горизонтальный эллипс.

1.2. Математический расчет параметров коноида Штурма

1. Астигматическая разность (интервал Штурма, $\Delta f'$):

Продольное расстояние вдоль оптической оси между первой и второй фокальными линиями называется **астигматической разностью** (интервалом Штурма):

$$\Delta f' = f'_2 - f'_1 = \frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} = \frac{D_1 - D_2}{D_1 \cdot D_2}$$

Сила астигматизма (астигматическая разность в диоптриях) определяется как:

$$\text{Ast} = D_1 - D_2$$

2. Положение круга наименьшего рассеяния (z_K):

Круг наименьшего рассеяния (КНР) располагается не в геометрической середине интервала Штурма, а в точке, соответствующей среднему гармоническому фокусных расстояний, что эквивалентно **средней арифметической оптической силе** (сфероэквиваленту):

$$D_{\text{ср}} = D_{\text{экв}} = \frac{D_1 + D_2}{2}$$

Положение плоскости КНР от задней вершины линзы:

$$z_K = f'_K = \frac{1}{D_{\text{ср}}} = \frac{2}{D_1 + D_2} = \frac{2f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2}$$

3. Диаметр круга наименьшего рассеяния (d_K):

Если световой диаметр входного зрачка (апертуры) равен $D_{\text{вх}}$, то из подобия геометрических треугольников в коноиде диаметр круга наименьшего рассеяния строго равен:

$$d_K = D_{\text{вх}} \cdot \frac{f'_2 - f'_1}{f'_1 + f'_2} = D_{\text{вх}} \cdot \frac{D_1 - D_2}{D_1 + D_2}$$

Физический вывод: Диаметр пятна рассеяния прямо пропорционален входной апертуре светового пучка и величине астигматизма $D_1 - D_2$. Именно поэтому сужение зрачка (диафрагмирование) при астигматизме уменьшает диаметр пятна нерезкости и временно повышает остроту зрения (эффект стенопеической щели).

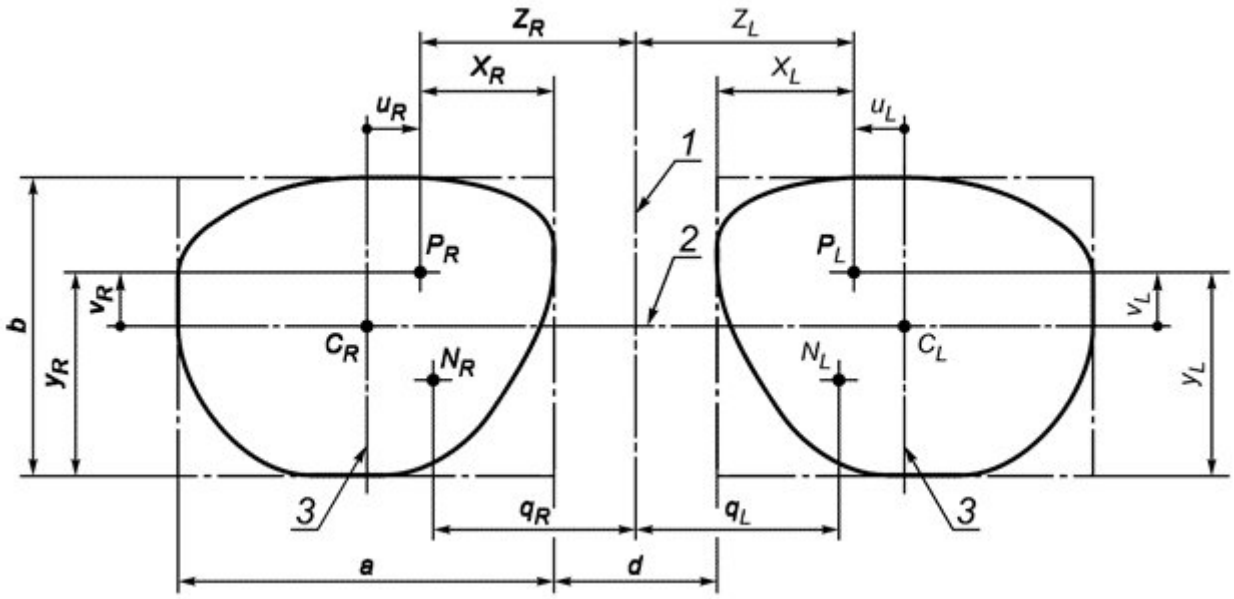
2. КЛАССИФИКАЦИЯ АСТИГМАТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ: ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И ТОРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Для создания расчетной астигматической разности оптическая деталь должна иметь хотя бы одну преломляющую поверхность с переменной кривизной. В очковой оптике применяются два базовых типа таких поверхностей: **цилиндрические** и **торические**.

2.1. Цилиндрические поверхности

Цилиндрическая поверхность образуется движением прямолинейной образующей параллельно самой себе по плоской направляющей кривой (окружности радиуса r).

Рис. 2. Главные сечения цилиндрической линзы: осевое (сечение нулевой оптической силы) и нормальное (сечение максимальной оптической силы).



Главные сечения цилиндрической поверхности:

1. **Осевое сечение (меридиан оси цилиндра,** ax**):** сечение плоскостью, проходящей через ось вращения цилиндра. Образующая представляет собой прямую линию ($r_{ax} = \infty$). Преломляющее действие в этом направлении **полностью отсутствует**:

$$D_{ax} = \frac{n-1}{r_{ax}} = \frac{n-1}{\infty} = 0{,}00 \text{ дптр}$$

2. **Нормальное сечение (аксиальный меридиан, меридиан действия):** сечение плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра. Образующая является окружностью радиуса r. В этом направлении оптическая сила максимальна:

$$D_{max} = D_{цил} = \frac{n-1}{r}$$

Оптическое действие чистой цилиндрической линзы:

Плоскоцилиндрическая линза превращает гомоцентрический пучок лучей от точечного источника не в точку, а в **одну сплошную фокальную линию**, ориентированную строго параллельно оси цилиндра!

2.2. Формула Эйлера для преломляющей силы в произвольном сечении

Преломляющая сила цилиндрической поверхности в произвольном меридиональном сечении, образующем угол θ с осью цилиндра (ax), рассчитывается по **теореме Эйлера для кривизны нормальных сечений поверхности**:

$$D(\theta) = D_{цил} \cdot \sin^2\theta$$

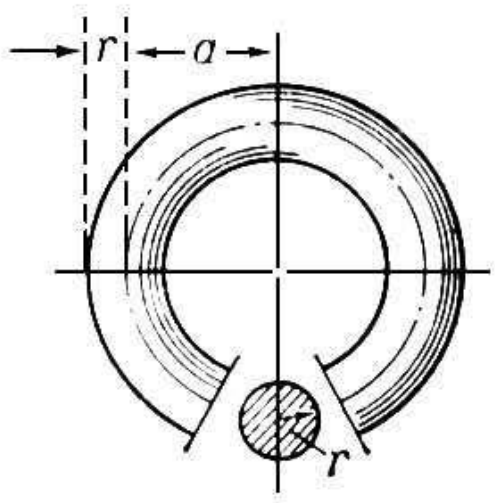
- При $\theta = 0^\circ$ (вдоль оси цилиндра): $D(0^\circ) = D_{\text{цил}} \cdot \sin^2(0^\circ) = 0$;
- При $\theta = 90^\circ$ (поперек оси цилиндра): $D(90^\circ) = D_{\text{цил}} \cdot \sin^2(90^\circ) = D_{\text{цил}}$;
- При $\theta = 45^\circ$: $D(45^\circ) = D_{\text{цил}} \cdot \sin^2(45^\circ) = 0{,}5 \cdot D_{\text{цил}}$ (половина силы цилиндра).

2.3. Торические поверхности

Цилиндрические очковые линзы обладают плоской второй поверхностью, что приводит к значительным аберрациям наклонных пучков (коме и дисторсии). Поэтому в современной очковой оптике применяются **торические поверхности**.

Торическая поверхность — это поверхность, образованная вращением дуги окружности радиуса r_1 вокруг оси вращения, лежащей в той же плоскости, но не проходящей через центр этой окружности (на расстоянии R от центра).

Рис. 3. Геометрическая фигура тора (бублика), меридиональный радиус r и экваториальный радиус R.



В зависимости от взаимного расположения оси вращения и центра образующей окружности различают три морфологических типа торических поверхностей:

1. **Тоноидальный тор (открытый тор, бочкообразный):** ось вращения не пересекает окружность;
2. **Параболический тор (соприкасающийся тор):** ось касается образующей окружности;
3. **Глобоидальный тор (закрытый тор, яблокообразный):** ось вращения пересекает образующую окружность.

Главные меридианы тора:

Торическая поверхность имеет два главных радиуса кривизны в двух ортогональных главных плоскостях:

- **Меридиональный радиус (r_m):** радиус образующей дуги окружности. Оптическая сила:

$$D_m = \frac{n-1}{r_m}$$

- **Экваториальный радиус (r_e):** радиус дуги, описываемой вершиной образующей при вращении вокруг внешней оси. Оптическая сила:

$$D_e = \frac{n-1}{r_e}$$

Астигматическая сила торической поверхности равна разности сил главных сечений:

$$\text{Ast} = |D_m - D_e| = (n-1) \cdot \left|\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r_e}\right|$$

3. АСТИГМАТИЧЕСКИЕ ЛИНЗЫ В ОЧКОВОЙ ОПТИКЕ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Для одновременной коррекции сферической аметропии (близорукости или дальнозоркости) и астигматизма применяют **стигмато-торические (сфероцилиндрические)** очковые линзы.

Очковая линза имеет две преломляющие поверхности:

- **Первая (базовая) поверхность:** обычно сферическая, характеризуется оптической силой $D_{сф}$;
- **Вторая поверхность:** торическая, характеризуется двумя силами D_{t1} и D_{t2}.

Суммарное действие линзы эквивалентно комбинации сферической линзы и скрещенной с ней цилиндрической линзы.

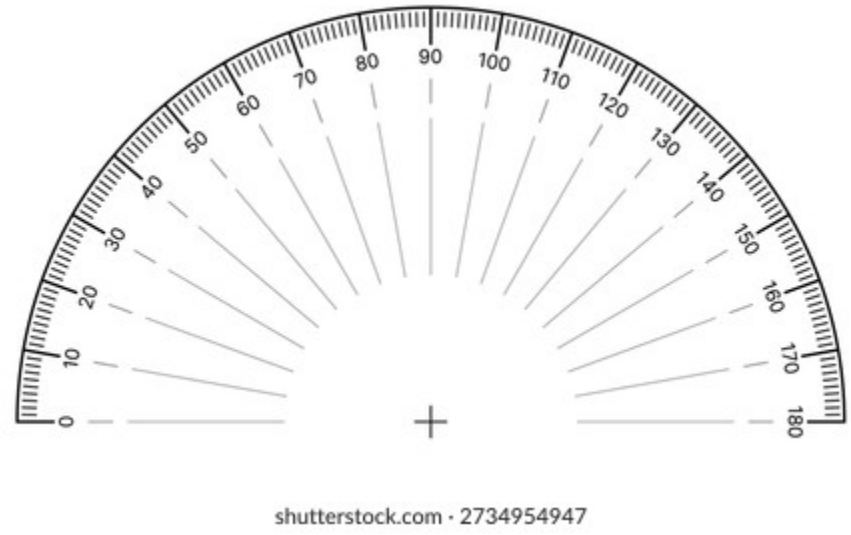
КЛАССИФИКАЦИЯ АСТИГМАТИЧЕСКИХ ЛИНЗ:

Тип линзы	Характеристика главных оптических сил (D1, D2)
1. Простая цилиндрическая (Plan-Cylinder)	Одно сечение имеет силу D = 0, второе — D ≠ 0. Пример: sph 0.00 cyl +2.00 ax 90°
2. Сложная сфероцилиндрическая одноименная	Оба сечения имеют силу одного знака (оба положительные либо оба отрицательные), но разные по абсолютной величине (|D1| ≠ |D2|). Пример: sph +2.00 cyl +1.50 ax 180°
3. Сложная сфероцилиндрическая разноименная (смешанная)	Главные сечения имеют противоположные знаки: одно сечение положительное, второе — отрицательное. Пример: sph +1.00 cyl -3.00 ax 45°

4. СИСТЕМА ТАБО (ТАВО) И МЕЖДУНАРОДНЫЙ СТАНДАРТ ЗАДАНИЯ ОСЕЙ

В международной оптометрии и офтальмологическом приборостроении ориентация главных меридианов астигматических линз строго регламентирована полукруговой шкалой **ТАБО (Technischer Ausschuss für Brillenoptik, 1917 г.)**, принятой в **ГОСТ Р 51044-97** и **ISO 8429**.

Рис. 4. Полукруговая шкала ТАБО: отсчет угла от 0° до 180° против часовой стрелки для обоих глаз.



Правила шкалы ТАБО:

1. Градусная шкала представляет собой полукруг от 0˚ до 180˚.
2. Отсчет ведется **против часовой стрелки**:
   - Точка 0˚ **(или** 180˚**)** располагается строго **горизонтально справа** (со стороны виска для правого глаза *OD* и со стороны носа для левого глаза *OS* при взгляде спереди);
   - Точка 90˚ располагается строго **вертикально вверху**;
   - Точка 180˚ располагается строго **горизонтально слева**.
3. Направление оси цилиндра всегда указывается целым числом в интервале от 1˚ до 180˚ с префиксом «ах» (от лат. *axis* — ось).

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТРАНСПОЗИЦИИ РЕЦЕПТУРНЫХ ПРОПИСЕЙ

В офтальмологической практике одна и та же оптическая астигматическая линза может быть математически и технологически описана тремя эквивалентными формами:

1. Форма с **плюсовым цилиндром** (cyl > 0);
2. Форма с **минусовым цилиндром** (cyl < 0);
3. Форма **бицилиндра** (двух скрещенных цилиндров без сферического компонента).

Операция перехода от одной эквивалентной формы записи рецепта к другой называется **транспозицией астигматической прописи**.

5.1. Правило знаковой транспозиции (переход от плюсового цилиндра к минусовому и наоборот)

Пусть исходный рецепт очковой линзы задан в канонической форме:

$$\text{Sph } S \quad \text{Cyl } C \quad \text{ax } \theta$$

Для перехода к эквивалентной форме с цилиндром противоположного знака:

$$\text{Sph } S' \quad \text{Cyl } C' \quad \text{ax } \theta'$$

применяется строгий трехшаговый алгоритм:

АЛГОРИТМ ЗНАКОВОЙ ТРАНСПОЗИЦИИ:
Шаг 1: Новая сферическая сила (S') равна алгебраической сумме
исходной сферы и цилиндра:
S' = S + C

Шаг 2: Новый цилиндр (C') равен исходному цилиндру с противоположным знаком:
C' = -C

Шаг 3: Новая ось (θ') поворачивается строго на 90°:
• Если исходная ось θ ≤ 90° → θ' = θ + 90°
• Если исходная ось θ > 90° → θ' = θ - 90°

Математическое доказательство правила транспозиции:

Запишем преломляющие силы в двух главных меридианах линзы θ и $\theta + 90^\circ$:

- В меридиане оси цилиндра (θ): действует только сферическая сила $D(\theta) = S$.
- В перпендикулярном меридиане действия ($\theta + 90^\circ$): действует сумма сферы и цилиндра $D(\theta + 90^\circ) = S + C$.

Если мы принимаем за базовую сферу величину $S' = S + C$, то в меридиане $\theta + 90^\circ$ цилиндрическая добавка должна отсутствовать, следовательно, новая ось цилиндра должна совпадать с меридианом $\theta' = \theta + 90^\circ$. В направлении же исходного меридиана θ общая сила должна остаться равной S:

$$S' + C' = S \Longrightarrow (S + C) + C' = S \Longrightarrow C' = -C$$

Что и требовалось доказать.

5.2. Численные примеры транспозиции

Пример 1: Переход от плюсового цилиндра к минусовому

Исходный рецепт: Sph + 2,00 дптр Cyl + 1,50 дптр ax 75°

1. Новая сфера: $S' = (+2{,}00) + (+1{,}50) = +3{,}50$ дптр;
2. Новый цилиндр: $C' = -(+1{,}50) = -1{,}50$ дптр;
3. Новая ось: $\theta \leq 90^\circ \Longrightarrow \theta' = 75^\circ + 90^\circ = 165^\circ$.
   Результат транспозиции: Sph + 3,50 дптр Cyl − 1,50 дптр ax 165°.

Пример 2: Переход от минусового цилиндра к плюсовому со сменой квадранта оси

Исходный рецепт: Sph $-4{,}50$ дптр Cyl $-2{,}00$ дптр ax 130°

1. Новая сфера: $S' = (-4{,}50) + (-2{,}00) = -6{,}50$ дптр;
2. Новый цилиндр: $C' = -(-2{,}00) = +2{,}00$ дптр;
3. Новая ось: $\theta > 90^\circ \Longrightarrow \theta' = 130^\circ - 90^\circ = 40^\circ$.
   Результат транспозиции: Sph $-6{,}50$ дптр Cyl $+2{,}00$ дптр ax 40°.

5.3. Бицилиндрическая транспозиция (разложение на два скрещенных цилиндра)

Любая сфероцилиндрическая линза Sph S Cyl C ax θ может быть представлена как комбинация двух тонких цилиндров со взаимно перпендикулярными осями:

$$\text{Cyl}_1 = S \;\text{ ax }\; (\theta \pm 90^\circ) \quad \oplus \quad \text{Cyl}_2 = (S + C) \;\text{ ax }\; \theta$$

Пример:
Рецепт: Sph $+3{,}00$ Cyl $+2{,}00$ ax 90°.
Бицилиндрическая форма: Cyl $+3{,}00$ ax 180° $\oplus$ Cyl $+5{,}00$ ax 90°.

6. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ И ОПТОМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ТОРИЧЕСКИХ ОЧКОВЫХ ЛИНЗ

В процессе производства астигматической очковой линзы технолог-оптик должен рассчитать радиусы кривизны обеих поверхностей заготовки: сферической базовой кривизны r_1 и двух торических радиусов r_{t1} и r_{t2} на второй поверхности.

6.1. Выбор базовой торической кривизны

В зависимости от того, какая поверхность очковой линзы изготавливается торической, различают:

- **Наружный тор (передняя торическая поверхность):** устаревший дизайн, создающий повышенные краевые искажения;
- **Внутренний тор (задняя торическая поверхность):** современный стандарт. Передняя поверхность делается сферической базовой ($D_{баз} > 0$), а задняя поверхность полируется в форме вогнутого тора, обращенного к глазу. Это уменьшает расстояние между линзой и глазом и минимизирует дисторсию поля зрения.

6.2. Пошаговый инженерный алгоритм расчета торической очковой линзы

Рассмотрим задачу расчета геометрических параметров очковой линзы из полимера CR-39 ($n = 1{,}498$) по рецепту:

$$\text{Sph } +2{,}00 \text{ дптр} \quad \text{Cyl } -1{,}50 \text{ дптр} \quad \text{ax } 180^\circ$$

с выбором базовой кривизны передней поверхности $D_{баз} = +6{,}00$ дптр.

ЭТАПЫ ИНЖЕНЕРНОГО РАСЧЕТА:
1. Определение радиуса передней сферической поверхности (r1):
   r1 = (n - 1) / D_баз = (1.498 - 1) / (+6.00) = 0.498 / 6.00 = +0.0830 м = +83.0 мм.

2. Определение требуемых преломляющих сил задней поверхности в главных сечениях:

По формуле тонкой линзы: D_общ = D_перед + D_зад → D_зад = D_общ - D_перед

• В меридиане оси (180°):
D_общ(180°) = Sph = +2.00 дптр
D_зад(180°) = +2.00 - (+6.00) = -4.00 дптр.

• В меридиане действия (90°):
D_общ(90°) = Sph + Cyl = +2.00 + (-1.50) = +0.50 дптр
D_зад(90°) = +0.50 - (+6.00) = -5.50 дптр.

3. Расчет радиусов кривизны торической поверхности (r_t1, r_t2):
r_зад(180°) = (1 - n) / D_зад(180°) = (1 - 1.498) / (-4.00) = -0.498 / -4.00 = +0.1245 м = +124.5 мм.
r_зад(90°) = (1 - n) / D_зад(90°) = (1 - 1.498) / (-5.50) = -0.498 / -5.50 = +0.0905 м = +90.5 мм.
(По ГОСТ 7427-78 для вогнутой поверхности радиус кривизны r < 0, т.е. r2_1 = -124.5 мм, r2_2 = -90.5 мм).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУЧНЫЕ ВЫВОДЫ

1. **Биофизическая природа астигматизма:** Астигматический пучок лучей формирует сложную пространственную фигуру — коноид Штурма, в которой отсутствует единая фокальная точка, а гомоцентрический пучок вырождается в две ортогональные фокальные линии, разделенные интервалом Штурма.
2. **Оптический принцип коррекции:** Астигматические (сфероцилиндрические и торические) линзы компенсируют асимметрию оптической силы глаза за счет введения искусственной астигматической разности противоположного знака, сводя фокальные линии Штурма в единый фокус на плоскости сетчатки.
3. **Строгость математического описания:** Преломляющая способность астигматической поверхности подчиняется теореме Эйлера ($D(\theta) = D_{\text{цил}}\sin^2\theta$). Любая сфероцилиндрическая линза однозначно описывается в международной системе ТАБО и допускает точную эквивалентную транспозицию между формами с положительным и отрицательным цилиндром.
4. **Прикладное значение:** Торические очковые и контактные линзы, а также интраокулярные торические линзы (ИОЛ), имплантируемые в микрохирургии катаракты, служат высокотехнологичным воплощением геометрической оптики, возвращая полноценное бинокулярное зрение миллионам людей.