ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

Лекция 2.3 «Стигматические линзы»

ВВЕДЕНИЕ. МЕСТО СТИГМАТИЧЕСКИХ ЛИНЗ В ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В оптическом приборостроении, офтальмологической практике и лазерной инженерии фундаментальным элементом абсолютного большинства приборов служит **стигматическая линза**.

Стигматическая линза (от греч. *stigma, stigmatos* — точка) — это центрированная оптическая деталь из прозрачного изотропного материала с показателем преломления n, ограниченная двумя полированными преломляющими поверхностями сферической или асферической формы, которая в параксиальной области трансформирует любой гомоцентрический (точечный) световой пучок из пространства предметов в строго гомоцентрический пучок в пространстве изображений.

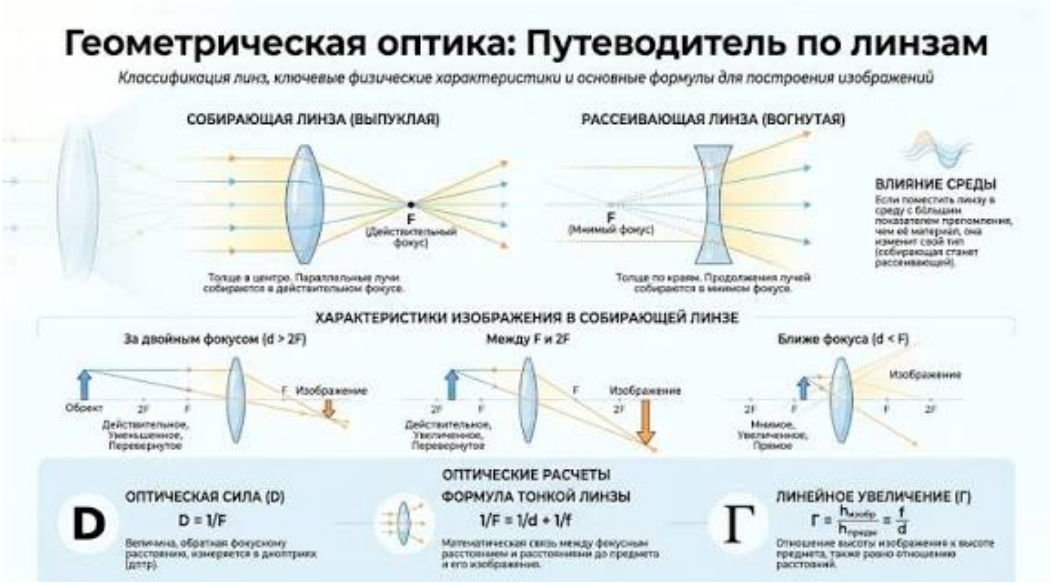
Стигматическая линза обладает вращательной (симметричной) оптической силой, равной во всех меридиональных сечениях, в отличие от астигматических (торических и цилиндрических) линз, имеющих различную рефракцию в главных сечениях.

В практических условиях линза чаще всего эксплуатируется в воздушной среде ($n_{\text{возд}} = 1{,}0000$). Строгий математический анализ реальной линзы с конечной толщиной по оси $d > 0$ требует отказа от упрощенной модели «тонкой линзы» и перехода к теории **толстой стигматической линзы** с расчетом всех ее кардинальных элементов и вертексных отрезков по стандарту **ГОСТ 7427-78**.

1. КОНСТРУКТИВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ОТДЕЛЬНОЙ ЛИНЗЫ В ВОЗДУХЕ

Любая одиночная стигматическая линза, находящаяся в воздухе, как конструктивно-технологический объект полностью и исчерпывающе задается набором из **пяти базовых параметров**:

Рис. 1. Конструктивные параметры толстой стигматической линзы: радиусы кривизны r_1,r_2, осевая толщина d, вершины S_1,S_2 и показатель преломления n.



1. **Радиус кривизны первой поверхности (r_1):** расстояние от передней вершины S_1 до центра кривизны первой поверхности C_1.
2. **Радиус кривизны второй поверхности (r_2):** расстояние от задней вершины S_2 до центра кривизны второй поверхности C_2.
3. **Осевая толщина линзы (d):** физическое расстояние между передней S_1 и задней S_2 вершинами линзы вдоль ее главной оптической оси ($d = \overline{S_1S_2} > 0$).
4. **Абсолютный показатель преломления материала линзы (n):** параметр оптического стекла или полимера на расчетной длине волны (обычно жёлтая линия гелия d: $\lambda_d =$ 587,56 нм).
5. **Световой диаметр линзы ($D_{св}$):** поперечный апертурный размер рабочей зоны линзы.

Правило знаков ГОСТ 7427-78 для радиусов кривизны:

- Если центр кривизны C расположен **справа** от вершины S по ходу луча $\Longrightarrow r > 0$ (выпуклая влево поверхность);
- Если центр кривизны C расположен **слева** от вершины S против хода луча $\Longrightarrow r < 0$ (вогнутая влево поверхность).

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЫВОД ФОРМУЛ КАРДИНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКОВ И ОПТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ТОЛСТОЙ ЛИНЗЫ

Рассмотрим прохождение параксиального луча через толстую линзу с толщиной d и показателем преломления n, расположенную в воздухе ($n_1 = n'_2 = 1$).

2.1. Оптические силы поверхностей

Оптическая сила первой преломляющей поверхности D_1 и второй поверхности D_2 определяются выражениями:

$$D_1 = \frac{n-1}{r_1}, \qquad D_2 = \frac{1-n}{r_2} = -\frac{n-1}{r_2}$$

2.2. Вывод эквивалентной оптической силы линзы (D)

Параксиальный инвариант преломления на первой поверхности дает высоту падения луча на вторую поверхность:

$$h_2 = h_1 - d \cdot \sigma'_1 = h_1\left(1 - \frac{d}{n}D_1\right)$$

Угол наклона выходящего луча после преломления на второй поверхности:

$$\sigma'_2 = \sigma'_1 + h_2 D_2 = h_1 D_1 \frac{1}{n} + h_1\left(1 - \frac{d}{n}D_1\right)D_2 = h_1\left(D_1 + D_2 - \frac{d}{n}D_1 D_2\right)$$

По определению, эквивалентная оптическая сила линзы равна $D = \frac{\sigma'_2}{h_1}$.

Отсюда получаем **формулу Ивана Ивановича Леви-Чивиты (формулу Гуллстранда)** для оптической силы толстой линзы:

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n}D_1 D_2$$

Подставляя выражения через радиусы кривизны r_1, r_2:

$$D = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-1)^2 d}{n \cdot r_1 \cdot r_2}$$

Эквивалентное заднее фокусное расстояние линзы:

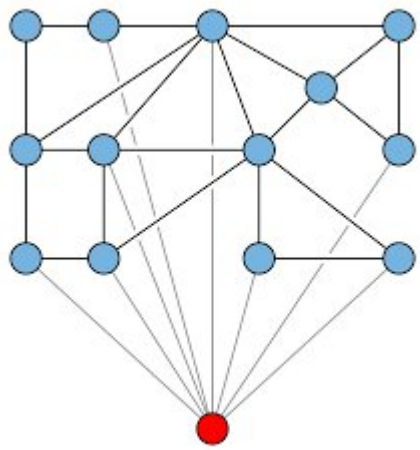
$$f' = \frac{1}{D} = \frac{1}{D_1 + D_2 - \frac{d}{n}D_1 D_2}$$

$$f = -f' = -\frac{1}{D}$$

2.3. Положение главных плоскостей и вертексных отрезков

Главные плоскости H и H' толстой линзы смещены относительно ее геометрических вершин S_1 и S_2.

Рис. 2. Вершинные (вертексные) отрезки s_F, s'_F и положения главных точек s_H, s'_H.



1. Положение передней главной точки ($s_H = \overline{S_1H}$):

Расстояние от передней вершины S_1 до передней главной точки H:

$$s_H = \overline{S_1H} = -\frac{d}{n}\frac{D_2}{D} = \frac{d \cdot (n-1) \cdot f'}{n \cdot r_2}$$

2. Положение задней главной точки ($s'_{H'} = \overline{S_2H'}$):

Расстояние от задней вершины S_2 до задней главной точки H':

$$s'_{H'} = \overline{S_2H'} = -\frac{d}{n}\frac{D_1}{D} = -\frac{d \cdot (n-1) \cdot f'}{n \cdot r_1}$$

3. Передний вершинный (вертексный) фокусный отрезок ($s_F = \overline{S_1F}$):

Расстояние от передней вершины линзы S_1 до переднего фокуса F:

$$s_F = f + s_H = -f' + s_H = -f'\left(1 + \frac{d}{n}D_2\right)$$

4. Задний вершинный (вертексный) фокусный отрезок ($s'_{F'} = \overline{S_2F'}$):

Расстояние от задней вершины линзы S_2 до заднего фокуса F':

$$s'_{F'} = f' + s'_{H'} = f'\left(1 - \frac{d}{n}D_1\right)$$

3. ВЕРТЕКСНАЯ (ВЕРШИННАЯ) РЕФРАКЦИЯ ЛИНЗЫ (Sv,Sv')

В офтальмологической оптике, приборостроении и диоптриметрии ключевой характеристикой линзы является не эквивалентная оптическая сила D, а **задняя вертексная (вершинная) рефракция (Sv')**.

Задняя вертексная рефракция (Sv'): величина, обратная заднему вершинному фокусному отрезку $s'_{F'}$, измеренная в диоптриях (м$^{-1}$):

$$Sv' = \frac{1}{s'_{F'}} = \frac{1}{f'\left(1 - \frac{d}{n}D_1\right)} = \frac{D}{1 - \frac{d}{n}D_1}$$

Раскрывая эквивалентную силу $D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n}D_1D_2$:

$$Sv' = D_2 + \frac{D_1}{1 - \frac{d}{n}D_1}$$

Передняя вертексная рефракция (Sv): величина, обратная переднему вершинному фокусному отрезку s_F:

$$Sv = \frac{1}{s_F} = \frac{D_1}{1 - \frac{d}{n}D_2} + D_2$$

Физический смысл вертексной рефракции:

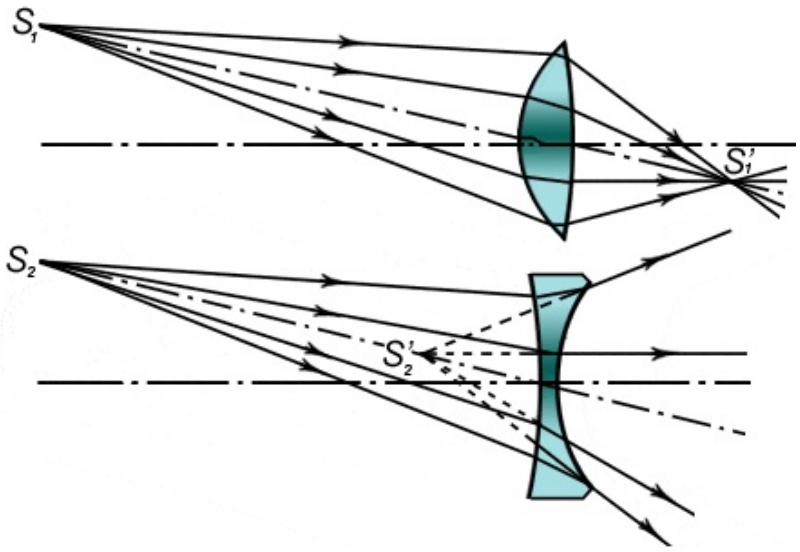
Задняя вертексная рефракция Sv' характеризует сходимость светового пучка непосредственно на выходе из задней вершины линзы S_2. Именно значение Sv' измеряется на диоптриметрах и указывается в рецептах на очковые и контактные линзы.

4. ТОПОЛОГИЯ КАРДИНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СТИГМАТИЧЕСКИХ ЛИНЗ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

В зависимости от знаков радиусов кривизны r_1, r_2 и соотношения толщин линзы делятся на 6 классических геометрий. Положение главных плоскостей H, H' относительно вершин S_1, S_2 кардинально различается для каждого типа.

СХЕМАТИЧЕСКОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГЛАВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ (H, H'):
1. Двояковыпуклая (r1 > 0, r2 < 0): S1 --(H)----(H')-- S2 (Внутри линзы)
2. Двояковогнутая (r1 < 0, r2 > 0): (H)---S1----S2---(H') (Перекрещены внутри/снаружи)
3. Плосковыпуклая (r1 > 0, r2 = ∞): S1 --(H)---------- H'≡S2 (Задняя плоскость на вершине)
4. Плосковогнутая (r1 = ∞, r2 > 0): H≡S1----------(H')-- S2 (Передняя плоскость на вершине)
5. Мениск положительный (r1 > 0, r2 > 0): S1 -- S2 --(H)--(H') (Вынесены за заднюю вершину)
6. Мениск отрицательный (r1 < 0, r2 < 0): (H)--(H')-- S1 -- S2 (Вынесены за переднюю вершину)

Рис. 3. Кардинальные плоскости и фокусы собирающей (двояковыпуклой) и рассеивающей линз.



4.1. Анализ кардинальных элементов по типам линз

1. Двояковыпуклая линза ($r_1 > 0, r_2 < 0$)

- $D_1 > 0, D_2 > 0 \Longrightarrow D > 0$ (собирающая).
- Главные плоскости H и H' располагаются **внутри линзы** между вершинами S_1 и S_2.
- $s_H > 0$ (смещена вправо от S_1), $s'_H < 0$ (смещена влево от S_2).
- При равных радиусах ($r_1 = -r_2 = r$) главные плоскости симметричны относительно центра линзы.

2. Двояковогнутая линза ($r_1 < 0, r_2 > 0$)

- $D_1 < 0, D_2 < 0 \Longrightarrow D < 0$ (рассеивающая).
- Главная плоскость H смещена влево от S_1 ($s_H < 0$), а H' смещена вправо от S_2 ($s'_{H'} > 0$).
- Главные плоскости перекрещиваются или лежат вблизи вершин.

3. Плосковыпуклая линза ($r_1 > 0, r_2 = \infty$)

- $D_1 = \frac{n-1}{r_1} > 0, D_2 = 0$.
- Из формул: $s_H = 0 \Longrightarrow$ передняя главная точка H **совпадает с передней вершиной** S_1 ($H \equiv S_1$).
- $s'_{H'} = -\frac{d}{n} \Longrightarrow$ задняя главная точка H' лежит внутри линзы на расстоянии d/n от задней плоской грани.

4. Положительный мениск ($r_1 > 0, r_2 > 0, r_1 < r_2$)

- Обе поверхности выпуклы в одну сторону.
- Обе главные плоскости H и H' **вынесены за пределы линзы в сторону выпуклости (вправо от задней вершины S_2)**.
- Это свойство используется в очковых линзах и гиперхроматических менисках для увеличения заднего отрезка.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР ПОЛНОГО РАСЧЕТА ТОЛСТОЙ СТИГМАТИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ

Рассчитаем все параметры и кардинальные отрезки толстой очковой линзы из кронового стекла К8.

Исходные данные:

- Радиус первой поверхности: $r_1 = +50{,}0$ мм $= +0{,}050$ м;
- Радиус второй поверхности: $r_2 = -100{,}0$ мм $= -0{,}100$ м;
- Осевая толщина: $d = 15{,}0$ мм $= 0{,}015$ м;
- Показатель преломления: $n = 1{,}5163$ (стекло К8).

Пошаговый расчет:

1. **Оптические силы поверхностей:**

$$D_1 = \frac{1{,}5163 - 1}{0{,}050} = \frac{0{,}5163}{0{,}050} = +10{,}326 \text{ дптр}$$

$$D_2 = -\frac{1{,}5163 - 1}{-0{,}100} = \frac{0{,}5163}{0{,}100} = +5{,}163 \text{ дптр}$$

2. **Эквивалентная оптическая сила (D):**

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} D_1 D_2$$

$$\frac{d}{n} D_1 D_2 = \frac{0{,}015}{1{,}5163} \cdot 10{,}326 \cdot 5{,}163 = 0{,}0098925 \cdot 53{,}313 = 0{,}5274 \text{ дптр}$$

$$D = 10{,}326 + 5{,}163 - 0{,}5274 = +14{,}9616 \text{ дптр}$$

3. **Эквивалентное фокусное расстояние (f'):**

$$f' = \frac{1}{14{,}9616} = 0{,}06683 \text{ м} = +66{,}83 \text{ мм}$$

4. **Положения главных точек (s_H, s'_H):**

$$s_H = \frac{d \cdot (n-1) \cdot f'}{n \cdot r_2} = \frac{0{,}015 \cdot 0{,}5163 \cdot 66{,}83}{1{,}5163 \cdot (-0{,}100)} = \frac{0{,}5176}{-0{,}15163} = -3{,}41 \text{ мм}$$

$$s'_H = -\frac{d \cdot (n-1) \cdot f'}{n \cdot r_1} = -\frac{0{,}015 \cdot 0{,}5163 \cdot 66{,}83}{1{,}5163 \cdot 0{,}050} = -\frac{0{,}5176}{0{,}075815} = -6{,}83 \text{ мм}$$

5. **Задний вертексный фокусный отрезок (s'_F):**

$$s'_F = f' + s'_H = 66{,}83 - 6{,}83 = +60{,}00 \text{ мм} = 0{,}0600 \text{ м}$$

6. **Задняя вертексная рефракция (Sv'):**

$$Sv' = \frac{1}{s'_F} = \frac{1}{0{,}0600} = +16{,}67 \text{ дптр}$$

Анализ результата:

Вследствие учета толщины $d = 15$ мм задняя вертексная рефракция линзы (+ 16,67 дптр) оказывается **на** 1,71 дптр **выше**, чем ее эквивалентная оптическая сила (+ 14,96 дптр). Это наглядно демонстрирует недопустимость использования формул тонкой линзы при расчете толстых компонентов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУЧНЫЕ ВЫВОДЫ

1. **Морфологическая и математическая полнота стигматической модели:**
Стигматическая линза представляет собой базовый классический элемент центрированной оптики. Ее параксиальное действие в воздухе полностью и безошибочно описывается пятью конструктивными параметрами ($r_1, r_2, d, n, D_{\text{св}}$) и шестью кардинальными элементами.
2. **Критическая роль толщины d в вертексной метрике:**
Учет осевой толщины по формуле Гуллстранда $D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} D_1 D_2$ принципиально важен для определения задней вертексной рефракции Sv'. При больших рефракциях погрешность игнорирования толщины превосходит медицинские и технические допуски.
3. **Топологический динамизм главных плоскостей:**
Смещение главных плоскостей H, H' зависит от формы линзы: у двояковыпуклых линз они лежат внутри, у плосковыпуклых одна плоскость совмещается с вершиной, а у менисков обе плоскости выносятся за пределы геометрии линзы, что широко используется для управления габаритами объективов.
4. **Прикладная значимость:**
Строгий расчет стигматических линз лежит в основе проектирования

офтальмологических систем, микроскопов, объективов лазерной фокусировки, телескопов и корректоров аберраций.