ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

Лекция 1.2 «Идеальная оптическая система»

ВВЕДЕНИЕ. КОНЦЕПЦИЯ КОЛЛИНЕАРНОЙ ОПТИКИ И ИДЕАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В классическом и современном оптическом приборостроении центральной задачей является проектирование оптических систем, способных формировать геометрически верные, высококонтрастные и резкие изображения реальных объектов. Однако прямое описание прохождения световых волн через последовательность преломляющих и отражающих поверхностей с произвольными кривизнами сопряжено со значительными математическими трудностями из-за нелинейного характера законов преломления и отражения, порождающих геометрические аберрации.

Для преодоления этой проблемы великими физиками и математиками XIX века — **Карлом Фридрихом Гауссом**, **Джеймсом Клерком Максвеллом** и **Эрнстом Аббе** — была создана фундаментальная абстракция: **теория идеальной (коллинеарной) оптической системы**.

Идеальная оптическая система представляет собой математическую и физическую модель оптического устройства, осуществляющего строгое проективное (коллинеарное) отображение пространства предметов в пространство изображений без каких-либо геометрических и физических аберраций.

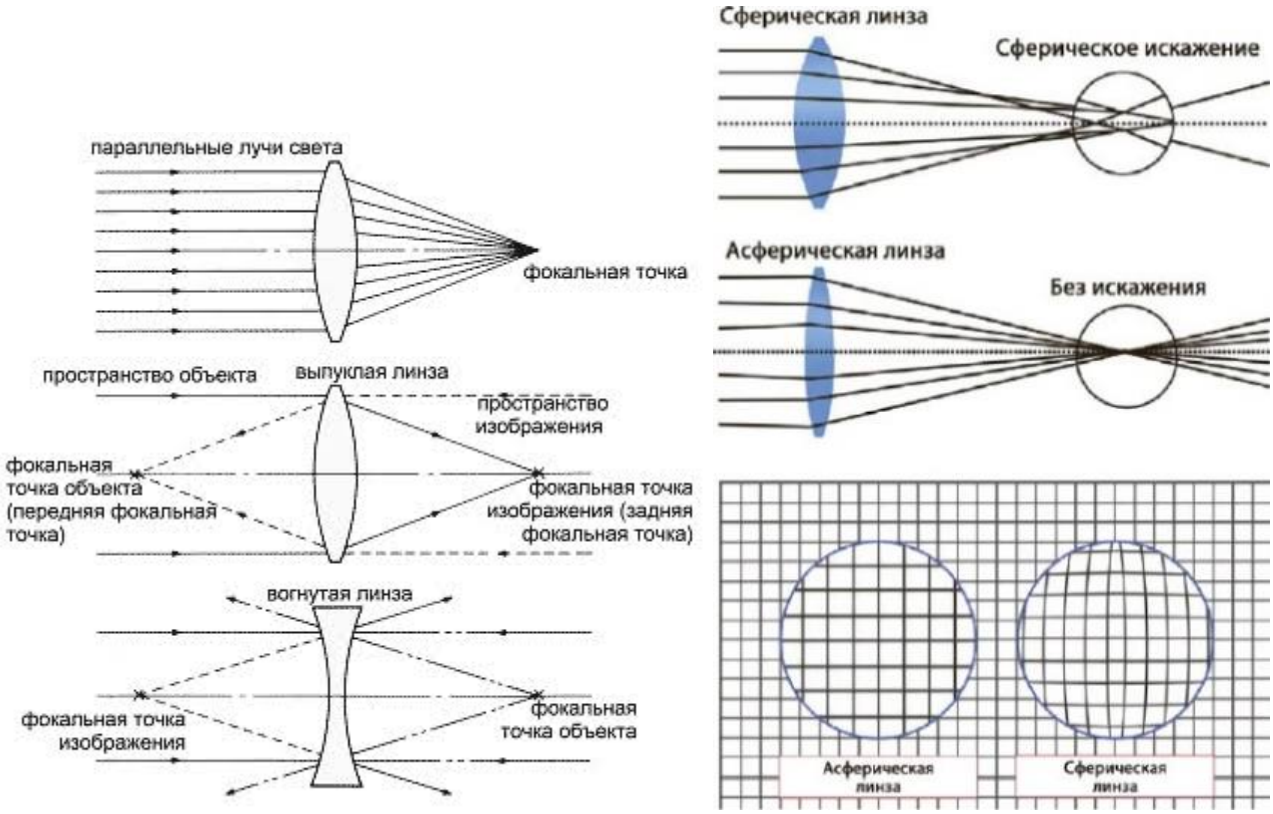
Хотя реальные оптические системы с конечными световыми апертурами и широкими полями зрения обладают сложными аберрациями, в узкой приосевой зоне — так называемой **параксиальной области Гаусса** — любая центрированная система строго подчиняется законам идеальной оптики. Более того, геометрический расчет любой оптической системы (микроскопа, телескопа, фотографического объектива, интраокулярной линзы или эндоскопа) всегда начинается с габаритного параксиального синтеза на основе теории идеальной системы.

1. ПОНЯТИЕ ОБ ИДЕАЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ И ЕЕ СВОЙСТВА

1.1. Постулаты идеального отображения Максвелла

В 1858 году Дж. К. Максвелл сформулировал фундаментальные условия, которым должна удовлетворять оптическая система, чтобы ее отображение являлось математически совершенным (идеальным).

Рис. 1. Преобразование гомоцентрического расходящегося пучка лучей в сходящийся стигматический пучок идеальной оптической системой.



Идеальной называется оптическая система, удовлетворяющая следующим трем взаимосвязанным постулатам:

1. **Постулат стигматичности (точечности):**
   Каждой точке пространства предметов A система ставит в соответствие единственную точку пространства изображений A'. Световой пучок, выходящий из точки A (гомоцентрический пучок), после прохождения через оптическую систему сохраняет свою гомоцентричность и строго сходится в точке A' (в случае действительного изображения) либо имеет геометрические продолжения лучей, сходящиеся в A' (в случае мнимого изображения). Точки A и A' называются **сопряженными точками**.
2. **Постулат плоскостности:**
   Любой плоской поверхности, перпендикулярной оптической оси в пространстве предметов, соответствует строго плоская сопряженная поверхность в пространстве изображений, также перпендикулярная оптической оси. В идеальной системе отсутствует аберрация кривизны поля изображения.
3. **Постулат подобия и сохранения масштаба (геометрического подобия):**
   Изображение любой двумерной фигуры, лежащей в плоскости, перпендикулярной оптической оси, строго геометрически подобно самому предмету. Это означает, что масштаб отображения (линейное увеличение) постоянен в пределах всей рассматриваемой плоскости и не зависит от удаления точек предмета от оптической оси. В идеальной системе отсутствует дисторсия.

1.2. Коллинеарное соответствие пространств предметов и изображений

С точки зрения проективной геометрии, идеальная оптическая система устанавливает взаимно однозначное точечное соответствие между трехмерным **пространством предметов**

и трехмерным **пространством изображений**. Такое преобразование называется **коллинеарным сродством (коллинеацией)**.

При коллинеарном преобразовании выполняются фундаментальные геометрические инварианты:

- Каждой точке соответствует точка: $A \leftrightarrow A'$;
- Каждой прямой линии соответствует прямая линия: $l \leftrightarrow l'$;
- Каждой плоскости соответствует плоскость: $P \leftrightarrow P'$;
- Пересекающимся прямым соответствуют пересекающиеся прямые, при этом точка пересечения прямых отображается в точку пересечения их изображений.

Математически общее проективное преобразование декартовых координат (x,y,z) пространства предметов в координаты (x',y',z') пространства изображений описывается дробно-линейными уравнениями:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0}, \quad z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0}$$

В реальных оптических приборах системы обладают **осевой (вращательной) симметрией**. Наличие оси симметрии — **главной оптической оси** — накладывает строгие ограничения на коэффициенты коллинеации:

- Оптическая ось пространства предметов отображается сама в себя и совпадает с оптической осью пространства изображений (ось $Z \equiv Z'$);
- Отображение инвариантно относительно любого угла поворота вокруг оптической оси;
- Плоскости, проходящие через оптическую ось (меридиональные плоскости), отображаются в те же самые меридиональные плоскости.

1.3. Параксиальная оптика Гаусса как физическая реализация идеальной системы

В реальных физических средах сферические и плоские границы раздела подчиняются строгим электромагнитным законам отражения и преломления Снеллиуса:

$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'$$

Функция синуса является существенно нелинейной и раскладывается в ряд Тейлора:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots$$

Если угол падения i и угол наклона луча к оси σ являются конечными, удержание членов порядка α^3 и выше приводит к возникновению монохроматических геометрических аберраций 3-го порядка (сферической аберрации, комы, астигматизма, дисторсии, кривизны поля).

Однако если ограничиться бесконечно малой окрестностью главной оптической оси, где углы наклона лучей σ и углы падения i столь малы, что с высокой степенью точности можно положить:

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha \quad (\text{в радианах}), \quad \cos\alpha \approx 1$$

то закон преломления Снеллиуса принимает строго линейный вид:

$$n \cdot i = n' \cdot i'$$

Эта оптическая область называется **параксиальной областью (областью Гаусса)**. В параксиальной области любая центрированная оптическая система из сферических поверхностей ведет себя как **строго идеальная оптическая система**, подчиняющаяся законам коллинеарного преобразования.

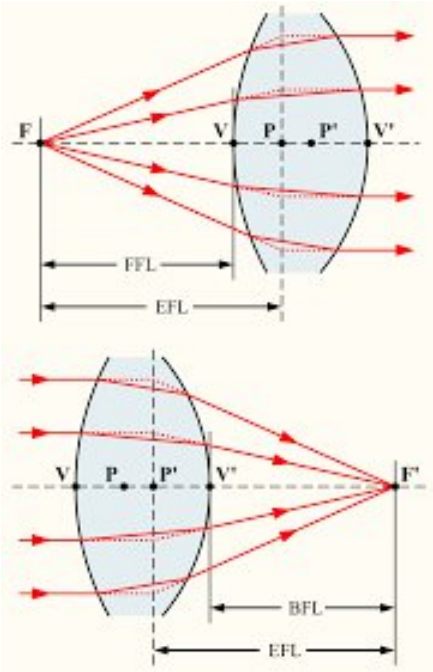
2. КАРДИНАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ИДЕАЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Согласно теории Карла Фридриха Гаусса и Эрнста Аббе, свойства любой идеальной (или параксиальной) центрированной оптической системы независимо от ее внутреннего устройства (количества линз, радиусов кривизны, толщин и показателей преломления) полностью определяются положением **шести кардинальных элементов**:

- Двух **основных фокусов** (F и F');
- Двух **главных точек** (P и P', либо H и H');
- Двух **узловых точек** (N и N').

Плоскости, проходящие через эти точки перпендикулярно оптической оси, называются соответственно **фокальными**, **главными** и **узловыми плоскостями**.

Рис. 2. Топография шести кардинальных точек: передний фокус F, задний фокус F′, передняя главная точка H (P), задняя главная точка H′ (P′), узловые точки N,N′.



2.1. Фокусы и фокальные плоскости

Передний (предметный) фокус (F)

- **Дефиниция:** Точка на главной оптической оси в пространстве предметов, сопряженная с бесконечно удаленной точкой на оптической оси в пространстве изображений ($s'_{F'} = \infty$).

- **Физическое свойство:** Любой световой луч, выходящий из переднего фокуса F (или направленный в него), после преломления в оптической системе распространяется в пространстве изображений строго параллельно главной оптической оси ($\sigma' = 0$).
- **Передняя фокальная плоскость (Φ):** Плоскость, проходящая через передний фокус F перпендикулярно оптической оси. Пучок лучей, выходящий из любой внеосевой точки передней фокальной плоскости, после прохождения системы трансформируется в параллельный пучок лучей, идущий под некоторым постоянным углом σ' к оптической оси.

Задний (изобразительный) фокус (F')

- **Дефиниция:** Точка на главной оптической оси в пространстве изображений, сопряженная с бесконечно удаленной точкой на оптической оси в пространстве предметов ($s_F = -\infty$).
- **Физическое свойство:** Световой луч, падающий на оптическую систему параллельно главной оптической оси ($\sigma = 0$), после преломления проходит через задний фокус F' (в собирающей системе) или своим геометрическим продолжением пересекает его (в рассеивающей системе).
- **Задняя фокальная плоскость (Φ'):** Плоскость, проходящая через задний фокус F' перпендикулярно оптической оси. Параллельный пучок лучей, падающий на систему под углом σ к оси, после прохождения фокусируется в соответствующей внеосевой точке задней фокальной плоскости.

2.2. Главные плоскости и главные точки

В коллинеарной оптике существует пара уникальных сопряженных плоскостей, в которых масштаб изображения строго равен масштабу предмета.

Главные плоскости (H и H')

- **Дефиниция:** Сопряженные плоскости, перпендикулярные оптической оси, линейное (поперечное) увеличение между которыми равно **плюс единице**:
$$\beta_H = +1$$
- **Передняя главная плоскость (H):** Расположена в пространстве предметов.
- **Задняя главная плоскость (H'):** Расположена в пространстве изображений.
- **Физический смысл и свойства:**
    1. Если предмет высотой y поместить в переднюю главную плоскость H, то в задней главной плоскости H' сформируется его изображение y' той же абсолютной величины и того же направления ($y' = y$).
    2. Любой луч, падающий на оптическую систему и пересекающий переднюю главную плоскость H на высоте h от оптической оси, выходит из задней главной плоскости H' на **точно такой же высоте** $h' = h$.
    3. Главные плоскости служат естественными базами отсчета: при расчетах преломление лучей условно считают происходящим скачкообразно от передней главной плоскости сразу к задней главной плоскости без изменения координаты высоты луча.

Главные точки (P,P' или H,H')

- Точки пересечения передней и задней главных плоскостей с главной оптической осью называются соответственно **передней главной точкой** ($P \equiv H$) и **задней главной точкой** ($P' \equiv H'$).

2.3. Узловые плоскости и узловые точки

Узловые точки (N и N')

- **Дефиниция:** Пара сопряженных точек на главной оптической оси, для которых **угловое увеличение равно плюс единице**:
$$\gamma_N = +1$$
- **Физическое свойство:** Любой луч, проходящий в пространстве предметов через переднюю узловую точку N под углом σ к оптической оси, после выхода из системы проходит через заднюю узловую точку N' под **тем же самым углом** к оси:
$$\sigma' = \sigma$$
Луч испытывает параллельный сдвиг без углового отклонения.

Теорема о совпадении узловых и главных точек:

Если показатели преломления среды в пространстве предметов и в пространстве изображений одинаковы ($n = n'$, например, оптическая система находится в воздухе $n = n' = 1$), то:

$$N \equiv P \quad (N \equiv H), \qquad N' \equiv P' \quad (N' \equiv H')$$

Узловые точки тождественно совпадают с соответствующими главными точками!
Если же $n \neq n'$ (например, оптическая система глаза, где пространство предметов — воздух $n = 1$, а пространство изображений — стекловидное тело $n' \approx 1{,}336$), то узловые точки смещены относительно главных точек на расстояние:

$$PN = P'N' = f' + f = f'\left(1 - \frac{n}{n'}\right)$$

2.4. Фокусные расстояния и их фундаментальная связь

- **Переднее фокусное расстояние (f):** Линейный отрезок по оптической оси от передней главной точки P до переднего фокуса F:
$$f = \overline{PF} = s_F - s_P$$
В соответствии с правилом знаков ГОСТ 7427-78, для собирающей системы передний фокус лежит слева от главной точки, следовательно, $f < 0$.
- **Заднее фокусное расстояние (f'):** Линейный отрезок по оптической оси от задней главной точки P' до заднего фокуса F':
$$f' = \overline{P'F'} = s'_{F'} - s'_{P'}$$
Для собирающей системы задний фокус лежит справа от задней главной точки, следовательно, $f' > 0$.

Связь переднего и заднего фокусных расстояний:

Отношение фокусных расстояний идеальной оптической системы равно отношению абсолютных показателей преломления сред с противоположным знаком:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

Для любой оптической системы, находящейся в однородной оптической среде ($n = n'$):

$$f' = -f$$

Заднее фокусное расстояние по абсолютной величине равно переднему фокусному расстоянию и противоположно ему по знаку.

2.5. Оптическая сила системы (D или $Ф$)

Оптическая сила (D) — фундаментальная физическая величина, характеризующая рефракционную (преломляющую) способность оптической системы:

$$D = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

Единицей оптической силы в Международной системе единиц (СИ) является **диоптрия (дптр,** $м^{-1}$**)**. Одна диоптрия равна оптической силе системы с задним фокусным расстоянием $f' = 1$ м, находящейся в воздухе ($n' = 1$).

- Если $D > 0$ ($f' > 0$) — система является **собирающей (положительной)**;
- Если $D < 0$ ($f' < 0$) — система является **рассеивающей (отрицательной)**;
- Если $D = 0$ ($f' = \infty$) — система называется **телескопической (афокальной)**.

3. МАСШТАБЫ ОТОБРАЖЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ УВЕЛИЧЕНИЯМИ

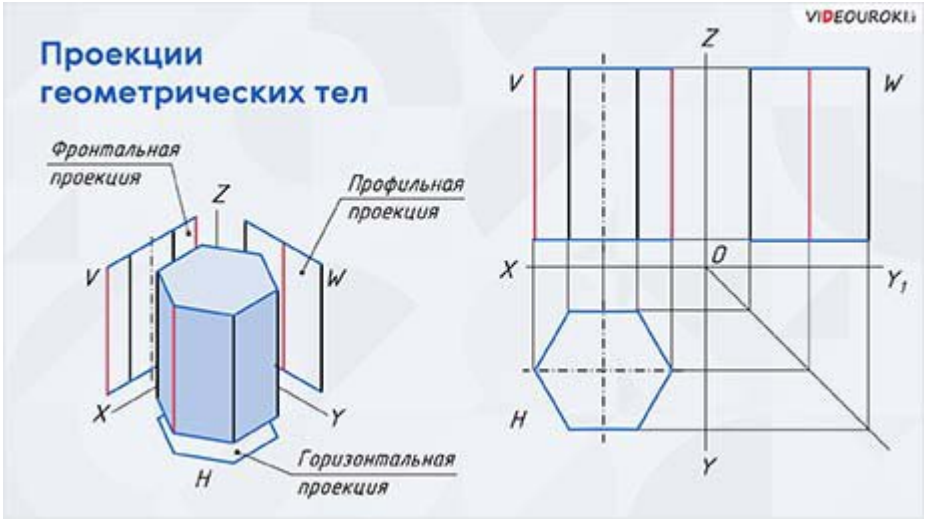
Масштаб и ориентация формируемого изображения в идеальной системе количественно характеризуются тремя взаимосвязанными типами увеличений: линейным, угловым и продольным.

3.1. Линейное (поперечное) увеличение (β)

Линейное увеличение (β) — это отношение линейного размера изображения y', измеренного перпендикулярно главной оптической оси, к линейному размеру предмета y:

$$\beta = \frac{y'}{y}$$

Рис. 3. Формирование изображения предмета y в виде y' и геометрические соотношения отрезков.



- **Знак линейного увеличения:**
  - Если $\beta > 0$, то y и y' имеют одинаковые знаки $\Longrightarrow$ изображение **прямое**.
  - Если $\beta < 0$, то знаки y и y' противоположны $\Longrightarrow$ изображение **перевернутое** (обратное).
- **Модуль линейного увеличения:**
  - $|\beta| > 1 \Longrightarrow$ изображение **увеличенное**;
  - $|\beta| < 1 \Longrightarrow$ изображение **уменьшенное**;
  - $|\beta| = 1 \Longrightarrow$ изображение **равное по величине** (в главных плоскостях $\beta = +1$).

3.2. Угловое увеличение (γ)

Угловое увеличение (γ) — отношение тангенса угла наклона сопряженного луча к оптической оси в пространстве изображений σ' к тангенсу угла наклона того же луча в пространстве предметов σ:

$$\gamma = \frac{\tan\sigma'}{\tan\sigma}$$

В параксиальной области углы малы ($\tan\sigma \approx \sigma$), поэтому:

$$\gamma = \frac{\sigma'}{\sigma}$$

Угловое увеличение является ключевой характеристикой визуальных приборов (луп, микроскопов, зрительных труб), согласующих угловой размер изображения с пределом разрешения сетчатки глаза.

3.3. Продольное увеличение (α)

Продольное увеличение (α) — отношение бесконечно малого линейного смещения плоскости изображения dz' вдоль оптической оси к вызвавшему его смещению плоскости предмета dz:

$$\alpha = \frac{dz'}{dz}$$

Продольное увеличение характеризует деформацию масштаба трехмерного объекта вдоль направления распространения световой волны (глубину резкости оптической системы).

3.4. Теорема Лагранжа — Гельмгольца и связь увеличений

Рассмотрим сопряженные отрезки предмета y и изображения y'. Световой луч выходит из вершины предмета под параксиальным углом σ и пересекает переднюю главную плоскость H на высоте h. После преломления луч выходит из задней главной плоскости H' на той же высоте $h' = h$ и попадает в вершину изображения под углом σ'.

Из тригонометрических соотношений параксиальных треугольников:

$$h = -z \cdot \tan\sigma, \qquad h = -z' \cdot \tan\sigma'$$

Приравнивая высоты, получаем:

$$z \cdot \tan\sigma = z' \cdot \tan\sigma' \Longrightarrow \frac{\tan\sigma'}{\tan\sigma} = \frac{z}{z'}$$

Подставляя формулу поперечного увеличения $\beta = \frac{n \cdot z'}{n' \cdot z}$, находим фундаментальное соотношение:

$$\gamma = \frac{\tan\sigma'}{\tan\sigma} = \frac{n}{n' \cdot \beta}$$

Отсюда вытекает **теорема (инвариант) Лагранжа — Гельмгольца**:

$$n \cdot y \cdot \tan\sigma = n' \cdot y' \cdot \tan\sigma' = \text{inv}$$

В параксиальном приближении:

$$n \cdot y \cdot \sigma = n' \cdot y' \cdot \sigma' = \text{inv}$$

Фундаментальное следствие для масштабов:

Перемножая линейное и угловое увеличение, получаем соотношение:

$$\beta \cdot \gamma = \frac{n}{n'}$$

Если оптическая система находится в воздухе ($n = n'$):

$$\beta \cdot \gamma = 1 \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{\beta}$$

Угловое увеличение строго обратно пропорционально линейному увеличению. Невозможно создать систему, одновременно дающую колоссальное линейное увеличение и собирающую световой пучок под малым углом (закон сохранения фазового объема / оптического этендю).

Связь продольного увеличения с линейным:

Продифференцируем формулу Гаусса $\frac{n'}{z'} - \frac{n}{z} = \text{const}$:

$$-\frac{n'}{z'^2} dz' + \frac{n}{z^2} dz = 0 \Longrightarrow \frac{dz'}{dz} = \frac{n}{n'} \left(\frac{z'}{z}\right)^2$$

Учитывая, что $\frac{z'}{z} = \frac{n'}{n}\beta$, получаем:

$$\alpha = \frac{n'}{n} \cdot \beta^2$$

Для системы в однородной среде ($n = n'$):

$$\alpha = \beta^2$$

Продольное увеличение идеальной оптической системы всегда строго положительно ($\alpha > 0$) и пропорционально квадрату линейного увеличения! Это означает:

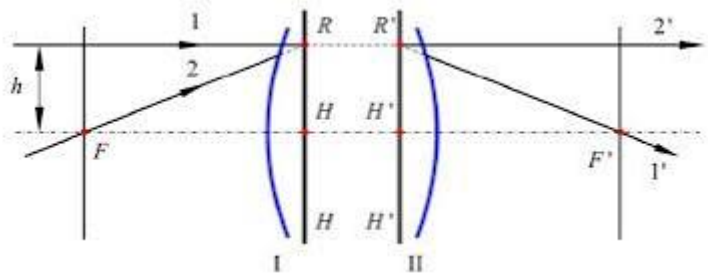
1. При продольном перемещении предмета слева направо его изображение **всегда также перемещается слева направо**, независимо от знака оптической силы системы;
2. Пространство изображений подвергается сильнейшему продольному искажению масштаба: если система дает линейное увеличение $\beta = 10\times$, то вдоль оптической оси масштаб растягивается в $\alpha = \beta^2 = 100$ раз!

4. ОСНОВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ИДЕАЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

4.1. Формула Гаусса (Связь сопряженных расстояний от главных плоскостей)

Пусть положение предмета A задается координатой s (или z), отсчитываемой от передней главной точки P, а положение изображения A' — координатой s' (или z'), отсчитываемой от задней главной точки P'.

Рис. 4. Системы координат Гаусса (от главных точек H,H′) и Ньютона (от фокусов F,F′).



В общем случае различных оптических сред каноническая **формула Гаусса** имеет вид:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = D$$

Для системы, находящейся в однородной среде (в воздухе $n = n' = 1, f' = -f$):

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

Важное замечание по правилу знаков:
При подстановке действительных величин в формулу Гаусса координата предмета для реального объекта, расположенного слева от системы, отрицательна ($s < 0$). Полагая $d = -s > 0$ (геометрическое расстояние до предмета) и $f = s' > 0$ (геометрическое расстояние до

изображения), получают известную школьную формулу тонкой линзы: $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$. В строгих инженерных расчетах ГОСТ всегда применяется алгебраическая форма с минусом: $\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$.

4.2. Формула Ньютона (Связь координат от фокальных плоскостей)

Исаак Ньютон предложил отсчитывать положения предмета и изображения не от главных плоскостей, положение которых внутри сложного объектива часто неизвестно экспериментатору, а от легко определяемых фокусов системы F и F'.

- **Отрезок Ньютона для предмета (x):** расстояние от переднего фокуса F до предмета A:
  $$x = s - f$$
  Если предмет находится левее фокуса F, то $x < 0$.
- **Отрезок Ньютона для изображения (x'):** расстояние от заднего фокуса F' до изображения A':
  $$x' = s' - f'$$
  Если изображение находится правее фокуса F', то $x' > 0$.

Из подобия треугольников (см. Рис. 4) непосредственно следует:

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x}$$

Приравнивая выражения для линейного увеличения:

$$\frac{x'}{f'} = \frac{f}{x} \Longrightarrow x \cdot x' = f \cdot f'$$

Это соотношение называется **формулой Ньютона**.
Для системы в воздухе ($n = n'$, $f = -f'$):

$$x \cdot x' = -(f')^2$$

Преимущества формулы Ньютона:

- Не требует знания положения главных плоскостей внутри многолинзовой оптической системы;
- Наглядно демонстрирует взаимное сопряжение пространств: если предмет приближается к переднему фокусу ($x \to 0$), то изображение стремительно уходит в бесконечность ($x' \to \infty$).

5. ТЕОРИЯ ТОНКИХ ЛИНЗ: АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

5.1. Понятие тонкой линзы в геометрической оптике

Линза представляет собой оптическую деталь из прозрачного однородного материала, ограниченную двумя полированными преломляющими поверхностями (сферическими, асферическими или плоскими).

Прямая, проходящая через центры кривизны обеих сферических поверхностей C_1 и C_2, является **главной оптической осью** линзы. Расстояние по оси между вершинами поверхностей S_1 и S_2 называется **осевой толщиной линзы** d.

Тонкая линза — это линза, толщина которой d пренебрежимо мала по сравнению с радиусами кривизны ее поверхностей r_1 и r_2 и разностью этих радиусов:

$$d \ll |r_1|, \quad d \ll |r_2|, \quad d \ll |r_1 - r_2|$$

Свойства тонкой линзы:

1. Обе вершины линзы S_1 и S_2 условно сливаются в одну точку — **оптический центр линзы (**O**)**;
2. Передняя и задняя главные плоскости H и H' сливаются в единую плоскость, проходящую через оптический центр O перпендикулярно оптической оси;
3. Любой световой луч, проходящий через оптический центр тонкой линзы O, не испытывает ни преломления, ни параллельного смещения ($\sigma' = \sigma$).

5.2. Формула шлифовщика линз (Вывод из рефракции на двух сферических поверхностях)

Выведем аналитическую зависимость фокусного расстояния тонкой линзы от ее конструктивных параметров.

Для одиночной сферической поверхности радиуса r, разделяющей среды с показателями преломления n и n', параксиальный инвариант преломления имеет вид:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

Применим эту формулу последовательно к двум поверхностям тонкой линзы с показателем преломления стекла $n_{\text{л}}$, находящейся в окружающей среде с показателем преломления $n_{\text{ср}}$:

1. **Преломление на первой поверхности (**r_1**):**
   Свет идет из среды $n_{\text{ср}}$ в линзу $n_{\text{л}}$. Предмет находится на расстоянии s_1:

$$\frac{n_{\text{л}}}{s'_1} - \frac{n_{\text{ср}}}{s_1} = \frac{n_{\text{л}} - n_{\text{ср}}}{r_1}$$

2. **Преломление на второй поверхности (**r_2**):**
   Свет идет из линзы $n_{\text{л}}$ в среду $n_{\text{ср}}$. Изображение, сформированное первой поверхностью s'_1, служит предметом для второй поверхности: $s_2 = s'_1 - d$. Ввиду бесконечной малости толщины тонкой линзы ($d \to 0$), полагаем $s_2 = s'_1$:

$$\frac{n_{\text{ср}}}{s'_2} - \frac{n_{\text{л}}}{s'_1} = \frac{n_{\text{ср}} - n_{\text{л}}}{r_2} = -\frac{n_{\text{л}} - n_{\text{ср}}}{r_2}$$

Складывая почленно уравнения для первой и второй поверхностей, сокращаем промежуточный член $\frac{n_{\text{л}}}{s'_1}$:

$$\frac{n_{\text{ср}}}{s'_2} - \frac{n_{\text{ср}}}{s_1} = (n_{\text{л}} - n_{\text{ср}})\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Разделив обе части уравнения на $n_{ср}$:

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_1} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой Гаусса для тонкой линзы ($\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$), получаем классическую **формулу шлифовщика линз**:

$$D = \frac{1}{f'} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Для линзы, находящейся в воздухе ($n_{ср} = 1, n_л = n$):

$$D = \frac{1}{f'} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

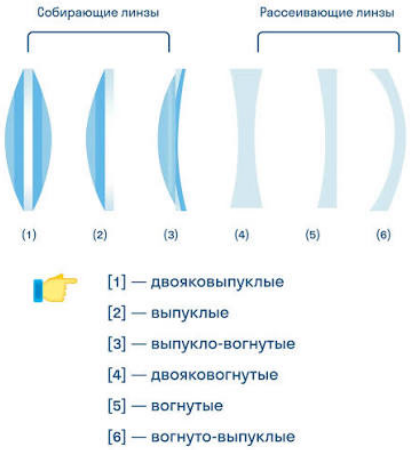
5.3. Классификация линз по форме и оптической силе

В зависимости от знаков радиусов кривизны поверхностей (по ГОСТ 7427-78) и соотношения толщин в центре и на краю линзы делятся на следующие морфологические типы:

ТИПЫ ЛИНЗ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ:

Собирающие (f' > 0, D > 0) (середина толще краев)	Рассеивающие (f' < 0, D < 0) (середина тоньше краев)
1. Двояковыпуклая (r1 > 0, r2 < 0)	1. Двояковогнутая (r1 < 0, r2 > 0)
2. Плосковыпуклая (r1 > 0, r2 = ∞)	2. Плосковогнутая (r1 = ∞, r2 > 0)
3. Выпукло-вогнутая (Мениск положительный, |r1| < |r2|)	3. Вогнуто-выпуклая (Мениск отрицательный, |r1| > |r2|)

Рис. 5. Геометрические формы собирающих (1–3) и рассеивающих (4–6) линз.

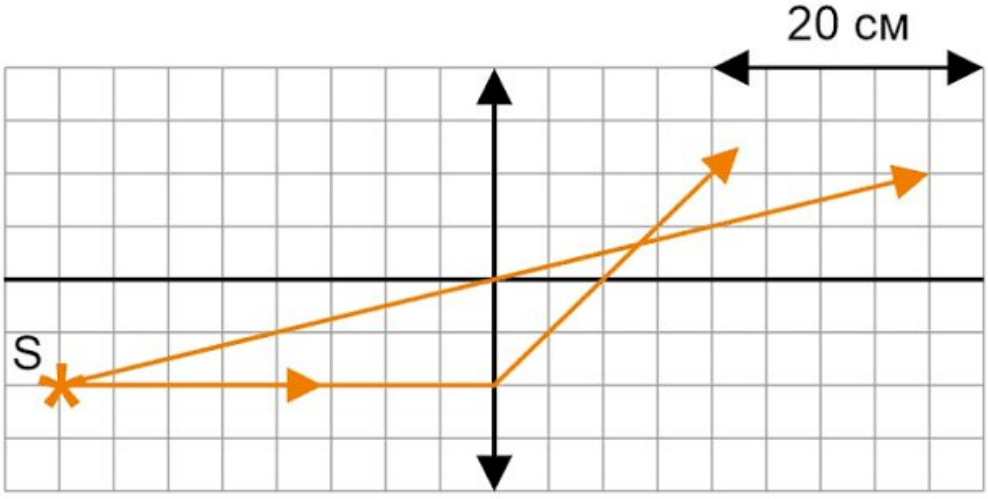


Важное физическое замечание: Линза является собирающей ($D > 0$) только тогда, когда показатель преломления ее материала превышает показатель преломления окружающей среды ($n_{л} > n_{ср}$). Если двояковыпуклую стеклянную линзу ($n_{л} = 1{,}5$) поместить в оптически более плотную среду — например, в сероуглерод ($n_{ср} = 1{,}63$), то член $\left(\frac{n_{л}}{n_{ср}} - 1\right)$ станет отрицательным, и двояковыпуклая линза превратится в **рассеивающую**!

5.4. Графические методы построения изображений

Для графического нахождения сопряженной точки A' произвольной точки предмета A достаточно построить ход любых двух из трех **канонических («замечательных») лучей**:

Рис. 6. Построение действительного изображения точки тремя каноническими лучами.



1. **Параллельный луч:** Световой луч, идущий из точки предмета параллельно главной оптической оси, после прохождения тонкой линзы проходит через задний фокус F' (в собирающей линзе) либо его геометрическое продолжение проходит через F' (в рассеивающей линзе).
2. **Центральный луч:** Луч, направленный из точки предмета через оптический центр линзы O, проходит сквозь тонкую линзу без преломления и изменения первоначального направления.

3. **Фокальный луч:** Луч, проходящий через передний фокус линзы F (или направленный на него), после преломления в линзе выходит параллельно главной оптической оси.

Таблица 1. Зависимость параметров изображения от положения предмета в собирающей линзе ($f' > 0$)

Зона положения предмета (s)	Положение изображения (s')	Тип изображения	Ориентация	Линейный масштаб (β)
В бесконечности ($s = -\infty$)	В заднем фокусе ($s' = f'$)	Действительное	Точка	$\beta = 0$
За двойным фокусом ($-\infty < s < -2f'$)	Между фокусом и двойным фокусом ($f' < s' < 2f'$)	Действительное	Перевернутое	Уменьшенное ($
В двойном фокусе ($s = -2f'$)	В двойном фокусе ($s' = 2f'$)	Действительное	Перевернутое	Равное ($
Между $2f'$ и f' ($-2f' < s < -f'$)	За двойным фокусом ($2f' < s' < +\infty$)	Действительное	Перевернутое	Увеличенное ($
В переднем фокусе ($s = -f'$)	В бесконечности ($s' = \infty$)	— (лучи параллельны)	—	$\beta = \infty$
Между фокусом и линзой ($-f' < s < 0$)	Слева от линзы ($s' < 0$)	**Мнимое**	**Прямое**	Увеличенное ($\beta > +1$)

Для **рассеивающей линзы ($f' < 0$)** при любом действительном положении предмета изображение всегда является **мнимым, прямым и уменьшенным** ($0 < \beta < +1$), располагаясь между передним фокусом и оптическим центром линзы.

5.5. Системы тонких линз (Сложение оптических сил)

Если две тонкие линзы с оптическими силами $D_1 = \frac{1}{f'_1}$ и $D_2 = \frac{1}{f'_2}$ сложены вплотную друг к другу так, что их оптические центры совпадают ($d \approx 0$), то суммарная оптическая сила эквивалентной линзы равна **алгебраической сумме оптических сил компонентов**:

$$D_{\text{экв}} = D_1 + D_2 \Longrightarrow \frac{1}{f'_{\text{экв}}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

Если же тонкие линзы разделены воздушным промежутком d, то эквивалентное фокусное расстояние и оптическая сила сложной двухкомпонентной системы определяются **формулой Гуллстранда**:

$$D_{\text{экв}} = D_1 + D_2 - d \cdot D_1 \cdot D_2$$

$$\frac{1}{f'_{\text{экв}}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{d}{f'_1 \cdot f'_2}$$

Положение главных плоскостей такой системы смещается относительно оптических центров компонентов:

$$s_H = \frac{d \cdot f'_{экв}}{f'_2}, \qquad s'_{H'} = -\frac{d \cdot f'_{экв}}{f'_1}$$

Этот принцип лежит в основе расчета фотографических телеобъективов, в которых применение рассеивающего компонента позади собирающего позволяет сместить главную плоскость вперед за пределы корпуса прибора, существенно сократив физическую длину объектива при огромном фокусном расстоянии.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУЧНЫЕ ВЫВОДЫ

1. **Методологический статус модели идеальной системы:**
   Идеальная оптическая система Гаусса — Аббе представляет собой фундаментальную математическую абстракцию, базирующуюся на теории коллинеарного проективного преобразования. Она устанавливает предельные теоретические свойства стигматического безаберрационного формирования пространственных оптических изображений.
2. **Полнота описания через кардинальные элементы:**
   Свойства любой сложной центрированной оптической системы параксиальной области полностью и исчерпывающе детерминированы положением шести кардинальных точек (двух фокусов, двух главных и двух узловых точек). Знание кардинальных элементов позволяет свести расчет сколь угодно сложного многолинзового объектива к универсальным алгебраическим формулам Гаусса и Ньютона.
3. **Строгая взаимосвязь масштабов и закон сохранения фазового объема:**
   Линейное, угловое и продольное увеличения оптической системы жестко связаны теоремой Лагранжа — Гельмгольца: произведение линейного и углового увеличений есть величина постоянная ($\beta \cdot \gamma = \frac{n}{n'}$), а продольное увеличение строго пропорционально квадрату линейного ($\alpha = \frac{n'}{n}\beta^2$). Это накладывает принципиальные физические ограничения на светосилу и пространственные масштабы формируемых пучков.
4. **Прикладное значение:**
   Теория идеальной системы и аппарат параксиальной оптики служат незаменимой отправной точкой инженерного проектирования оптических систем любой сложности — от офтальмологических интраокулярных линз и лазерных коллиматоров до сложных космических телескопов и субмикронных фотолитографических объективов.