ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 9. ТЕМА 9. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Основные понятия системы линейных уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка $m \times n$ называется совокупность m уравнений с n неизвестными, каждое из которых имеет вид:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где a_{ij} — коэффициенты при неизвестных, b_i — свободные члены, x_j — неизвестные переменные.

В матричной форме СЛАУ записывается как $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где:

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$ — матрица коэффициентов системы;
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — вектор неизвестных;
- $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ — вектор свободных членов.

Расширенной матрицей системы называется матрица $[A \mid \mathbf{b}]$, полученная присоединением к матрице A столбца свободных членов $\mathbf{b}$.

Решением СЛАУ называется упорядоченный набор значений $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, который при подстановке в каждое уравнение системы обращает его в верное равенство.

Классификация систем по числу решений:

- **Совместная система** — имеет хотя бы одно решение.
- **Несовместная система** — не имеет решений.
- **Определённая система** — совместная и имеет единственное решение.
- **Неопределённая система** — совместная и имеет бесконечно много решений.

Однородной СЛАУ называется система, в которой все свободные члены равны нулю ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$). Неоднородная СЛАУ — система, в которой хотя бы один свободный член отличен от нуля.

Ключевым инструментом анализа СЛАУ является понятие ранга матрицы. Ранг матрицы A, обозначаемый $\mathrm{rang}(A)$ или $r(A)$, — это максимальный порядок ненулевого минора матрицы, либо число линейно независимых строк (столбцов). Согласно теореме Кронекера — Капелли, СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы:

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}([A \mid \mathbf{b}]).$$

Если при этом $\mathrm{rang}(A) = n$ (число неизвестных), система определена (имеет единственное решение). Если $\mathrm{rang}(A) < n$, система неопределённа (имеет бесконечное множество решений).

2. Правило решения произвольной системы линейных уравнений

ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

Общий алгоритм решения произвольной СЛАУ включает следующие этапы:

1. **Формирование расширенной матрицы** $[A \mid \mathbf{b}]$.
2. **Приведение матрицы к ступенчатому (трапециевидному) виду** с помощью элементарных преобразований строк:
   - перестановка двух строк;
   - умножение строки на ненулевое число;
   - прибавление к одной строке другой, умноженной на число.
3. **Определение рангов** $\mathrm{rang}(A)$ и $\mathrm{rang}([A \mid \mathbf{b}])$ по числу ненулевых строк в ступенчатых формах матриц A и $[A \mid \mathbf{b}]$.
4. **Проверка совместности** по критерию Кронекера — Капелли. Если ранги не совпадают, система несовместна, решение отсутствует.
5. **Анализ числа решений**:
   - если $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}([A \mid \mathbf{b}]) = n$, система имеет единственное решение;
   - если $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}([A \mid \mathbf{b}]) < n$, система имеет бесконечное множество решений; число свободных переменных равно $n - \mathrm{rang}(A)$.
6. **Выражение базисных переменных через свободные** (в случае неопределённой системы) либо нахождение единственного решения (в случае определённой системы).
7. **Запись общего решения** в параметрической форме (для неопределённых систем) или конкретного набора значений (для определённых систем).

Данный алгоритм универсален и применим к системам любого размера, включая случаи, когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

3. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса — это алгоритмический подход к решению СЛАУ, основанный на последовательном исключении переменных путём приведения системы к ступенчатому виду. Метод состоит из двух основных этапов: прямого хода и обратного хода.

Прямой ход метода Гаусса

Цель прямого хода — привести расширенную матрицу $[A \mid \mathbf{b}]$ к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

Алгоритм прямого хода:

1. Рассматривается первый столбец матрицы. Если в нём есть ненулевой элемент, выбирается строка с ненулевым ведущим элементом (желательно по модулю наибольшим для численной устойчивости) и при необходимости переставляется на первое место.
2. С помощью преобразований обнуляются все элементы ниже ведущего в первом столбце.
3. Процесс повторяется для следующего столбца, исключая уже обработанные строки.
4. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнут ступенчатый вид или не будут исчерпаны столбцы.

На выходе получается ступенчатая матрица, по которой можно определить ранг системы и проверить её совместность.

Обратный ход метода Гаусса

После приведения матрицы к ступенчатому виду выполняется обратный ход — последовательное нахождение значений переменных, начиная с последней строки.

Алгоритм обратного хода:

1. Из последнего ненулевого уравнения выражается последняя переменная (или одна из переменных, если система неопределённая).
2. Полученное выражение подставляется в предыдущее уравнение, откуда выражается следующая переменная.
3. Процесс продолжается до полного определения всех переменных (для определённой системы) или выражения базисных переменных через свободные (для неопределённой системы).

Пример применения метода Гаусса

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Шаг 1. Формирование расширенной матрицы:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Шаг 2. Прямой ход:

- Обнуляем элементы первого столбца ниже первой строки. Умножаем первую строку на $\frac{3}{2}$ и прибавляем ко второй; умножаем первую строку на 1 и прибавляем к третьей:

$$R_2 \leftarrow R_2 + \frac{3}{2}R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3 + R_1$$

Получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

- Умножаем вторую строку на 4 и вычитаем из третьей:

$$R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2$$

Результат:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Шаг 3. Обратный ход:

- Из третьего уравнения: $-z = 1 \Rightarrow z = -1$.
- Подставляем z во второе уравнение: $0{,}5y + 0{,}5(-1) = 1 \Rightarrow 0{,}5y = 1{,}5 \Rightarrow y = 3$.
- Подставляем y и z в первое уравнение: $2x + 3 - (-1) = 8 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$.

Решение: $x = 2, y = 3, z = -1$.