ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 9. ТЕМА 8. СТЕПЕННЫЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ФУНКЦИИ. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Степенная функция

Определение. Степенной функцией называется функция вида $y = x^\alpha$, где α — заданное действительное число, x — независимая переменная. Область определения зависит от значения показателя α: при $\alpha \in \mathbb{R}$ она задаётся на множестве $x > 0$; при рациональном α область определения расширяется в зависимости от вида дроби.

Основные случаи.

- $\alpha = n \in \mathbb{N}$ — целая положительная степень. Функция определена на всей числовой прямой. При нечётном n она нечётна и монотонно возрастает на $\mathbb{R}$; при чётном n — чётна, убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$.
- $\alpha = -n$ — функция $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, определённая при $x \neq 0$. При нечётном n нечётна, при чётном — чётна; в нуле имеет разрыв второго рода (вертикальная асимптота $x = 0$).
- $\alpha = \dfrac{1}{n}$ при нечётном n — корень $y = \sqrt[n]{x}$, определён на всей числовой прямой, возрастает.
- $\alpha = \dfrac{1}{2k}$ — корень чётной степени, определён при $x \geq 0$, возрастает, выпуклый вверх.
- $\alpha < 0$ и произвольное действительное — функция определена при $x > 0$, убывает, ветви графика приближаются к осям координат, которые служат асимптотами.

Для $\alpha > 0$ при $x > 0$ функция монотонно возрастает и выпукла вниз при $\alpha > 1$ либо выпукла вверх при $0 < \alpha < 1$; при $\alpha < 0$ — монотонно убывает. Все графики при $x > 0$ проходят через точку $(1; 1)$.

2. Показательная функция

Определение. Показательной функцией называется функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Свойства.

- Область определения — $\mathbb{R}$, множество значений — $(0; +\infty)$.
- График проходит через точку $(0; 1)$, поскольку $a^0 = 1$.
- При $a > 1$ функция монотонно возрастает; при $0 < a < 1$ — монотонно убывает. Ось Ox является горизонтальной асимптотой.
- Функция непрерывна и дифференцируема на всей числовой прямой; производная $(a^x)' = a^x \ln a$.
- Выполняется основное тождество: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$.

Особую роль играет экспоненциальная функция $y = e^x$, где e — иррациональное число, $e \approx 2{,}71828$, определяемое пределом $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Для неё $(e^x)' = e^x$, что выделяет её среди всех показательных функций.

3. Логарифмическая функция

Определение. Логарифмической функцией называется функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Она определяется как функция, обратная показательной: $\log_a x = y \iff a^y = x$.

Свойства.

- Область определения — $(0; +\infty)$, множество значений — $\mathbb{R}$.
- График проходит через точку $(1; 0)$, поскольку $\log_a 1 = 0$.
- При $a > 1$ функция монотонно возрастает; при $0 < a < 1$ — монотонно убывает. Ось Oy — вертикальная асимптота.
- Основные тождества: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; $\log_a x^n = n \log_a x$; $a^{\log_a x} = x$.
- Формула перехода к другому основанию: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

График логарифмической функции симметричен графику соответствующей показательной функции относительно прямой $y = x$ — прямое следствие взаимной обратности этих функций.

Частные случаи: натуральный логарифм $\ln x = \log_e x$ и десятичный логарифм $\lg x = \log_{10} x$.

4. Тригонометрические функции

Определения. Для произвольного угла α, заданного в радианной мере, тригонометрические функции определяются через координаты точки единичной окружности. Если точка $M(x; y)$ получена поворотом точки $(1; 0)$ на угол α, то

$$\sin\alpha = y, \qquad \cos\alpha = x, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}\ (x \neq 0), \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}\ (y \neq 0).$$

Свойства.

- **Синус** $y = \sin x$: область определения $\mathbb{R}$, множество значений $[-1; 1]$, нечётная функция, период $T = 2\pi$, возрастает на $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.
- **Косинус** $y = \cos x$: область определения $\mathbb{R}$, множество значений $[-1; 1]$, чётная функция, период $T = 2\pi$, возрастает на $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$.
- **Тангенс** $y = \operatorname{tg} x$: область определения $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, множество значений $\mathbb{R}$, нечётная, период $T = \pi$, возрастает на каждом промежутке непрерывности; вертикальные асимптоты $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$.
- **Котангенс** $y = \operatorname{ctg} x$: область определения $x \neq \pi k$, множество значений $\mathbb{R}$, нечётная, период $T = \pi$, убывает на каждом промежутке непрерывности.

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Графики синуса и косинуса — синусоиды; график косинуса получается из графика синуса сдвигом на $\dfrac{\pi}{2}$ вдоль оси Ox: $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Обратные тригонометрические функции

Тригонометрические функции периодичны и потому не взаимно однозначны на всей области определения. Обратные функции вводятся после ограничения области определения до промежутка монотонности.

- **Арксинус** $y = \arcsin x$: обратная к $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Область определения $[-1; 1]$, множество значений $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, нечётная, возрастающая.
- **Арккосинус** $y = \arccos x$: обратная к $\cos x$ на $[0; \pi]$. Область определения $[-1; 1]$, множество значений $[0; \pi]$, убывающая; выполняется соотношение $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
- **Арктангенс** $y = \operatorname{arctg} x$: обратная к $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Область определения $\mathbb{R}$, множество значений $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, нечётная, возрастающая; асимптоты $y = \pm\frac{\pi}{2}$.
- **Арккотангенс** $y = \operatorname{arcctg} x$: обратная к $\operatorname{ctg} x$ на $(0; \pi)$. Область определения $\mathbb{R}$, множество значений $(0; \pi)$, убывающая; $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Графики обратных функций получаются из графиков соответствующих прямых функций симметрией относительно прямой $y = x$.

6. Преобразования графиков

Пусть задан график функции $y = f(x)$. Рассмотрим преобразования, приводящие к графикам функций $y = F(x)$.

6.1. Параллельный перенос

Сдвиг вдоль оси ординат. График функции $y = f(x) + b$ получается из графика $y = f(x)$ параллельным переносом на вектор $(0; b)$: при $b > 0$ — вверх, при $b < 0$ — вниз. Сам график при этом не меняет формы.

Сдвиг вдоль оси абсцисс. График функции $y = f(x - a)$ получается переносом на вектор $(a; 0)$: при $a > 0$ — вправо, при $a < 0$ — влево. Внимание к знаку: сдвиг на $a > 0$ соответствует вычитанию a под знаком функции.

Пример: график $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ — синусоида, сдвинутая на $\frac{\pi}{3}$ вправо.

6.2. Симметрия относительно осей координат и начала координат

Симметрия относительно оси Oy. График функции $y = f(-x)$ зеркально отражает график $y = f(x)$ относительно оси ординат. Если функция f чётная, график не изменяется.

Симметрия относительно оси Ox. График функции $y = -f(x)$ получается отражением относительно оси абсцисс: каждая точка $(x_0; y_0)$ переходит в $(x_0; -y_0)$.

Симметрия относительно начала координат. График функции $y = -f(-x)$ есть образ графика $y = f(x)$ при центральной симметрии с центром в начале координат: точка $(x_0; y_0)$ переходит в $(-x_0; -y_0)$. Для нечётных функций $f(-x) = -f(x)$, поэтому их графики центрально-симметричны (графики $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \arcsin x$).

6.3. Симметрия относительно прямой $y = x$

Отражение графика $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$ даёт график функции, обратной к f (там, где обратная функция существует). Точка $(x_0; y_0)$ при этом переходит в $(y_0; x_0)$. Именно так график логарифмической функции получается из графика показательной, а графики арксинуса и арккосинуса — из графиков синуса и косинуса на выбранных промежутках.

6.4. Растяжение и сжатие вдоль осей координат

Вдоль оси ординат. График функции $y = kf(x)$, $k > 0$, получается из графика $y = f(x)$ растяжением в k раз вдоль оси Oy при $k > 1$ и сжатием в k раз при $0 < k < 1$. Ординаты всех точек умножаются на k; абсциссы сохраняются.

Вдоль оси абсцисс. График функции $y = f(kx)$, $k > 0$, получается сжатием в k раз вдоль оси Ox при $k > 1$ и растяжением при $0 < k < 1$. Абсциссы точек делятся на k; при $k < 0$ дополнительно выполняется отражение относительно оси Oy.

Пример: график $y = 2\sin 3x$ получается из синусоиды сжатием в 3 раза по горизонтали (период становится равным $\frac{2\pi}{3}$) и растяжением в 2 раза по вертикали.

6.5. Композиция преобразований

При последовательном применении нескольких преобразований порядок действий имеет значение. Типовая схема построения графика $y = Af(kx - a) + b$, $A > 0$, $k > 0$:

1. сжатие вдоль оси Ox в k раз: $y = f(kx)$;
2. сдвиг вдоль оси Ox на $\frac{a}{k}$: $y = f(k(x - \frac{a}{k})) = f(kx - a)$;
3. растяжение вдоль оси Oy в A раз: $y = Af(kx - a)$;
4. сдвиг вдоль оси Oy на b: $y = Af(kx - a) + b$.

7. Сводная таблица преобразований

Преобразование	Функция	Действие над графиком $y = f(x)$
Сдвиг по Oy	$y = f(x) + b$	Перенос на b вверх ($b > 0$)
Сдвиг по Ox	$y = f(x - a)$	Перенос на a вправо ($a > 0$)
Симметрия относительно Oy	$y = f(-x)$	Отражение относительно оси ординат
Симметрия относительно Ox	$y = -f(x)$	Отражение относительно оси абсцисс
Центральная симметрия	$y = -f(-x)$	Отражение относительно начала координат
Отражение относительно $y = x$	$x = f(y)$	График обратной функции
Растяжение по Oy	$y = kf(x), k > 1$	Растяжение в k раз по вертикали
Сжатие по Ox	$y = f(kx), k > 1$	Сжатие в k раз по горизонтали