ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 8. ТЕМА 7. ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

1. Понятие функции. Область определения и множество значений

Пусть даны два множества X и Y. **Функцией** f, заданной на множестве X со значениями во множестве Y, называется правило (закон), по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Записывают: $y = f(x)$, $f\colon X \to Y$. Переменная x называется **независимой переменной** (аргументом), y — **зависимой переменной** (значением функции).

Ключевое требование определения — **однозначность**: каждому значению аргумента отвечает ровно одно значение функции. Именно поэтому график окружности $x^2 + y^2 = R^2$ не задаёт функцию $y(x)$: одному x соответствуют два значения y.

Областью определения функции f называется множество $D(f)$ всех значений аргумента, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл. Для функции, заданной формулой без дополнительных условий, область определения находится из требования выполнимости всех указанных операций. Типичные ограничения:

- деление на нуль: знаменатель дроби не равен нулю;
- извлечение корня чётной степени: подкоренное выражение неотрицательно;
- логарифм: подлогарифмическое выражение строго положительно;
- показательная функция a^x: ограничений на x нет.

Например, для $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ область определения находится из условия $4 - x^2 \geqslant 0$, то есть $D(f) = [-2;\, 2]$.

Множеством значений (областью значений) функции f называется множество $E(f)$ всех значений, которые принимает функция при $x \in D(f)$. Так, для $f(x) = \sqrt{x}$ имеем $D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$; для $f(x) = x^2$ — $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [0; +\infty)$.

2. График функции. Способы задания

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости с координатами $(x;\ f(x))$, где x пробегает область определения функции. График функции обладает характеристическим свойством: **любая вертикальная прямая пересекает его не более чем в одной точке**.

Функция может быть задана:

1. **Аналитически** — формулой $y = f(x)$ (основной способ в математическом анализе);
2. **Таблично** — конечным набором пар значений (результаты измерений, статистика);
3. **Графически** — непосредственно рисунком (например, регистрация показаний прибора);
4. **Словесно (описательно)** — указанием правила, например $f(x)$ — ближайшее к x целое число.

Построение графика по формуле выполняется по точкам с учётом свойств функции (чётности, периодичности, асимптот), а также с использованием известных преобразований графиков: сдвигов $f(x-a)+b$, растяжений $kf(x)$ и $f(kx)$, отражений.

3. Свойства функций

Монотонность. Функция f называется **возрастающей** на промежутке $I \subseteq D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in I$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$; **неубывающей** — если $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Аналогично определяются убывающая и невозрастающая функции. Возрастающие и убывающие функции объединяются термином «строго монотонные», неубывающие и невозрастающие — «монотонные».

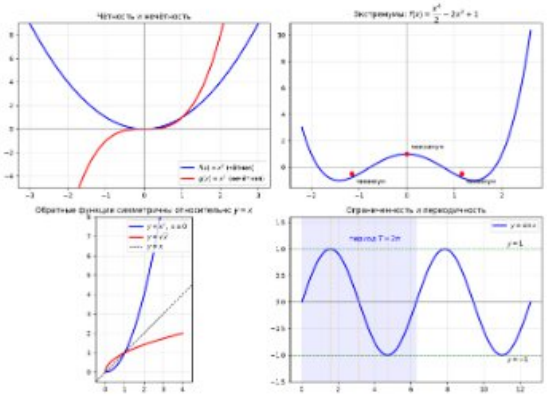
Примеры: $f(x) = x^3$ возрастает на всей числовой прямой; $f(x) = x^2$ убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$; $f(x) = \log_2 x$ возрастает на своей области определения.

Чётность и нечётность. Функция f называется **чётной**, если её область определения симметрична относительно нуля и $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$; **нечётной**, если $f(-x) = -f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси ординат, график нечётной — относительно начала координат. Классические примеры: $x^2,\ \cos x,\ |x|$ — чётные; $x^3,\ \sin x,\ \operatorname{tg} x,\ x^{-1}$ — нечётные. Всякая функция единственным образом представима в виде суммы чётной и нечётной составляющих:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{чётная часть}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{нечётная часть}}.$$

Ограниченность. Функция f называется **ограниченной сверху** на множестве X, если существует число M такое, что $f(x) \leqslant M$ при всех $x \in X$; **ограниченной снизу** — если $f(x) \geqslant m$; **ограниченной** — если она ограничена сверху и снизу, то есть $|f(x)| \leqslant C$. Так, функция $\sin x$ ограничена ($-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$), функция x^2 ограничена снизу, функция x^3 не ограничена ни сверху, ни снизу.

Периодичность. Функция f называется **периодической** с периодом $T \neq 0$, если $f(x+T) = f(x)$ для всех $x \in D(f)$, причём $x+T$ также принадлежит области определения. Наименьшее положительное T при его существовании называется **основным периодом**. Если T — период, то nT при любом целом $n \neq 0$ — также период. Все тригонометрические функции периодичны: основной период $\sin x$ и $\cos x$ равен 2π, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — π.



4. Промежутки монотонности, наибольшее и наименьшее значения, экстремумы

Число M называется **наибольшим значением** функции f на множестве X (записывают $f_{\text{наиб}}$ или $\max\limits_{x \in X} f(x)$), если $f(x) \leqslant M$ при всех $x \in X$ и существует точка $x_0 \in X$, в которой $f(x_0) = M$. Аналогично определяется наименьшее значение. Заметим: ограниченная сверху функция не обязательно достигает наибольшего значения (пример: $f(x) = x$ на открытом промежутке $(0; 1)$ ограничена, но максимума не имеет).

Точка x_0 называется **точкой максимума**, если существует окрестность этой точки, в которой $f(x) \leqslant f(x_0)$; **точкой минимума** — если $f(x) \geqslant f(x_0)$. Значения функции в этих точках называются **максимумом и минимумом функции** соответственно. Общее название — **точки экстремума**. Важно различать понятия: экстремум — локальная характеристика (в окрестности точки), наибольшее и наименьшее значения — глобальные (на всём множестве).

Графическая интерпретация. На графике промежутки возрастания отвечают участкам, где кривая «поднимается» слева направо; точки максимума и минимума соответствуют «вершинам» и «впадинам» кривой; наибольшее и наименьшее значения — максимальная и минимальная ординаты графика на рассматриваемом множестве. Для непрерывной на отрезке функции справедлива **теорема Вейерштрасса**: функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$, ограничена на нём и достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Для дифференцируемой функции экстремум возможен лишь в критических точках, где $f'(x) = 0$ или производная не существует (теорема Ферма о необходимом условии экстремума). Достаточное условие: если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «−», x_0 — точка максимума; с «−» на «+» — точка минимума.

5. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах

Функциональные зависимости — универсальный язык описания количественных закономерностей. Классические примеры:

- **Прямая пропорциональность** $s = vt$ — путь при равномерном движении; **линейная** зависимость $y = kx + b$ — стоимость покупки, давление идеального газа при постоянном объёме (закон Шарля $p = p_0(1 + \alpha t)$);
- **Обратная пропорциональность** $p = \frac{nRT}{V}$ — давление газа от объёма при постоянной температуре (закон Бойля–Мариотта); сила тока $I = \frac{U}{R}$ по закону Ома;
- **Квадратичная зависимость** $S = \pi r^2$ — площадь круга от радиуса; $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ — высота тела при свободном падении с учётом начальной скорости;
- **Показательная функция** $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$ — радиоактивный распад (закон радиоактивного распада), рост вклада при сложных процентах, размножение бактерий в благоприятной среде;
- **Логарифмическая функция** — шкала Рихтера для силы землетрясений, шкала pH, психофизический закон Вебера–Фехнера;
- **Тригонометрические функции** — гармонические колебания $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ в механике, электротехнике (переменный ток), акустике.

6. Арифметические операции над функциями

Пусть даны функции f и g с областями определения $D(f)$ и $D(g)$. **Суммой, разностью, произведением и частным** функций называются функции, определённые соответственно формулами:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

причём область определения первых трёх равна $D(f) \cap D(g)$, а частного — $D(f) \cap D(g)$ за вычетом точек, где $g(x) = 0$. Пример: для $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = \sqrt{2 - x}$ область определения частного $\sqrt{x}/\sqrt{2 - x}$ — промежуток $[0; 2)$.

Свойства операций переносятся на функции из арифметики чётных и нечётных функций: сумма двух чётных (нечётных) функций чётна (нечётна); произведение двух чётных или двух нечётных функций чётно; произведение чётной и нечётной функций нечётно. Кроме арифметических, рассматриваются и **операция умножения функции на число** $k \cdot f(x)$, и композиция (см. ниже).

7. Сложная функция (композиция)

Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$. **Сложной функцией** (композицией, суперпозицией) называется функция $h\colon X \to Z$, определяемая правилом $h(x) = g(f(x))$; обозначение $h = g \circ f$. Значение композиции вычисляется «изнутри наружу»: сначала применяется внутренняя функция f, затем внешняя g.

Пример: $h(x) = \sqrt{1 + x^2}$ — композиция $f(x) = 1 + x^2$ и $g(u) = \sqrt{u}$. Область определения композиции состоит из тех $x \in D(f)$, для которых $f(x) \in D(g)$. В общем случае $g \circ f \neq f \circ g$ — композиция не коммутативна; она ассоциативна: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Понятие композиции лежит в основе правила дифференцирования сложной функции (цепного правила) и разложения функций в ряды.

8. Понятие о непрерывности функции

Функция f называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции при $x \to x_0$ существует и равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это равносильно выполнению трёх условий: существует $f(x_0)$; существует $\lim_{x \to x_0} f(x)$; они совпадают. Функция, непрерывная в каждой точке промежутка, называется **непрерывной на этом промежутке**. Наглядно непрерывность означает, что график можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги; нарушение непрерывности (разрыв) проявляется как скачок, выколотая точка или уход графика в бесконечность (вертикальная асимптота, как у $y = 1/x$ в нуле).

Основные сведения о непрерывных функциях: сумма, разность, произведение и частное непрерывных функций (при знаменателе, не обращающемся в нуль) непрерывны; композиция непрерывных функций непрерывна. Элементарные функции (степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические, а также их суперпозиции) непрерывны в каждой точке своей области определения. На непрерывности основаны теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях (п. 4), теорема Больцано–Коши о промежуточном значении и метод приближённого решения уравнений делением отрезка пополам.

9. Обратные функции

Пусть $f\colon X \to Y$ — взаимно однозначное соответствие (биекция) между X и Y: различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции. Тогда существует **обратная функция** $f^{-1}\colon Y \to X$, которая каждому $y = f(x)$ ставит в соответствие то единственное x, при котором $f(x) = y$. Функции f и f^{-1} называются **взаимно обратными**; при этом

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y, \qquad f^{-1}\big(f(x)\big) = x.$$

Достаточное условие существования обратной функции: если f строго монотонна на промежутке X, то она обратима на X, и обратная функция определена на $E(f)$ и сохраняет характер монотонности.

Область определения и область значений обратной функции меняются местами: $D(f^{-1}) = E(f)$, $E(f^{-1}) = D(f)$. Это ключевой практический факт: например, для $y = x^2$ на всей числовой прямой обратной функции не существует (нарушена однозначность), но на промежутке $X = [0;+\infty)$ функция строго возрастает и обратима; обратной служит $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ с $D = [0;+\infty)$, $E = [0;+\infty)$.

Другие примеры взаимно обратных функций: экспонента и натуральный логарифм (e^x и $\ln x$), x^3 и $\sqrt[3]{x}$, $\sin x$ на $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ и $\arcsin x$ на $[-1;1]$.

График обратной функции. Если точка $(a;b)$ принадлежит графику f, то точка $(b;a)$ принадлежит графику f^{-1}. Переход от $(a;b)$ к $(b;a)$ — симметрия относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, то есть прямой $y = x$. Следовательно, **график обратной функции симметричен графику исходной функции относительно прямой** $y = x$. Построение графика обратной функции по графику данной сводится к зеркальному отражению относительно этой прямой. Отсюда же следует простое правило нахождения формулы обратной функции: из $y = f(x)$ выражают x через y, а затем меняют обозначения переменных.