ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 8. ТЕМА 8. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. Понятие матрицы

Матрица — это прямоугольная таблица элементов (чисел, символов, функций), расположенных в строках и столбцах. Матрица размера $m \times n$ содержит m строк и n столбцов. Обозначается как $A = (a_{ij})$, где $i = 1, 2, \ldots, m$ — номер строки, $j = 1, 2, \ldots, n$ — номер столбца, а a_{ij} — элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Формально:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Частные виды матриц:

- **Квадратная матрица**: $m = n$.
- **Диагональная матрица**: все элементы вне главной диагонали равны нулю.
- **Единичная матрица** I_n: диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1.
- **Нулевая матрица**: все элементы равны нулю.
- **Транспонированная матрица** A^T: матрица, полученная из A заменой строк на столбцы (и наоборот): $(A^T)_{ij} = a_{ji}$.

2. Действия над матрицами

Сложение и вычитание матриц

Складывать и вычитать можно только матрицы одинакового размера. Сумма (разность) матриц A и B размера $m \times n$ — это матрица $C = A \pm B$, элементы которой определяются как $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Алгоритм сложения двух матриц A и B:

1. Проверить, что размеры A и B совпадают ($m \times n$).
2. Для каждой пары индексов (i, j), где $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, вычислить $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
3. Записать результат в виде матрицы C.

Умножение матрицы на число

Произведение матрицы A на скаляр λ — это матрица B, элементы которой $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

Умножение матриц

Умножение матриц определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Пусть A имеет размер $m \times k$, а B — размер $k \times n$. Тогда произведение $C = AB$ — матрица размера $m \times n$, элементы которой:

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj}.$$

Алгоритм умножения матриц $A_{m \times k}$ и $B_{k \times n}$:

1. Убедиться, что число столбцов A совпадает с числом строк B.
2. Создать результирующую матрицу C размера $m \times n$, изначально заполненную нулями.
3. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ и каждого $j = 1, \ldots, n$:
   - вычислить скалярное произведение i-й строки A и j-го столбца B: $c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj}$.
4. Записать полученные значения в C.

Важное замечание: умножение матриц некоммутативно: в общем случае $AB \neq BA$.

3. Определитель матрицы

Определитель — числовая характеристика квадратной матрицы, отражающая её свойства (в частности, обратимость). Обозначается $\det(A)$ или $|A|$.

Определитель 2×2

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = ad - bc.$$

Определитель 3×3 (правило Саррюса)

Для $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Общий случай: разложение по строке/столбцу

Для произвольной квадратной матрицы A порядка n определитель можно вычислить разложением по i-й строке:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

где M_{ij} — минор элемента a_{ij}, то есть определитель матрицы, полученной вычёркиванием i-й строки и j-го столбца; $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением.

Алгоритм вычисления определителя через разложение:

1. Выбрать строку или столбец с наибольшим числом нулей (для упрощения).
2. Для каждого ненулевого элемента выбранной строки/столбца:
   - вычеркнуть соответствующую строку и столбец, получить минор M_{ij};
   - найти алгебраическое дополнение $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$;
   - умножить $a_{ij} A_{ij}$.
3. Суммировать все такие произведения.

Свойства определителя:

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- При перестановке двух строк (или столбцов) знак определителя меняется.
- Если две строки (или столбца) равны или пропорциональны, определитель равен нулю.
- Умножение строки на число λ умножает определитель на λ.
- Прибавление к строке другой строки, умноженной на число, не меняет определитель.

4. Обратная матрица. Ранг матрицы

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется обратимой (невырожденной), если существует матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$.

Методы нахождения обратной матрицы:

1. **Метод алгебраических дополнений (через союзную матрицу):**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A),$$

где $\mathrm{adj}(A)$ — матрица, составленная из алгебраических дополнений A_{ij}, транспонированная.

Алгоритм:

1. Вычислить $\det(A)$. Если $\det(A) = 0$, обратной матрицы не существует.
2. Для каждого элемента a_{ij} вычислить алгебраическое дополнение A_{ij}.
3. Составить матрицу из A_{ij} и транспонировать её (получить $\mathrm{adj}(A)$).
4. Разделить каждый элемент $\mathrm{adj}(A)$ на $\det(A)$.

2. **Метод элементарных преобразований (метод Гаусса–Жордана):**
К матрице A приписывают справа единичную матрицу I, получая расширенную матрицу $(A \mid I)$. Затем с помощью элементарных преобразований строк приводят левую часть к единичной матрице. В правой части получится A^{-1}.

Алгоритм:

1. Составить расширенную матрицу $[A \mid I]$.
2. Привести A к ступенчатому виду, а затем к единичной, используя:
   - перестановку строк;
   - умножение строки на ненулевое число;
   - прибавление к одной строке другой, умноженной на число.
3. Если левая часть стала I, то правая часть — это A^{-1}. Если левая часть не может быть приведена к I (появилась нулевая строка), матрица необратима.

Ранг матрицы

Ранг матрицы — это максимальное число линейно независимых строк (или столбцов). Обозначается $\mathrm{rank}(A)$. Ранг можно находить двумя основными способами:

1. **Метод окаймляющих миноров**: последовательно искать ненулевые миноры возрастающего порядка.
2. **Метод элементарных преобразований**: привести матрицу к ступенчатому виду и посчитать число ненулевых строк.

Алгоритм нахождения ранга через ступенчатый вид:

1. С помощью элементарных преобразований строк привести матрицу к ступенчатому (или улучшенному ступенчатому) виду.
2. Посчитать число ненулевых строк — это и будет ранг.

Свойства ранга:

- $\mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$.
- $\mathrm{rank}(AB) \leq \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$.
- Ранг не меняется при транспонировании.
- Ранг равен порядку наибольшего ненулевого минора.