ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 7. ТЕМА 6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Тригонометрические уравнения и неравенства составляют один из центральных разделов элементарной математики и сохраняют фундаментальное значение для математического анализа, дифференциальных уравнений, физики и инженерных дисциплин. Настоящая лекция посвящена систематическому изложению теории решений простейших тригонометрических уравнений и неравенств, а также аппарата обратных тригонометрических функций, на котором эта теория основана.

1. Обратные тригонометрические функции. Арксинус, арккосинус, арктангенс

Тригонометрические функции синус, косинус и тангенс не являются взаимно однозначными на своей естественной области определения, поскольку периодичны. Поэтому на всей числовой прямой у них не существует обратных функций. Однако на подходящих промежутках монотонности каждая из этих функций обратима, и соответствующие обратные функции называются арксинусом, арккосинусом и арктангенсом.

Арксинус. Функция $y = \sin x$ строго возрастает и принимает все значения от -1 до 1 на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. Обозначение: $\arcsin a$.

Таким образом, по определению:

$$\arcsin a = x \iff \sin x = a, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Примеры: $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

Арксинус — нечётная функция:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

Арккосинус. Функция $y = \cos x$ строго убывает на отрезке $[0; \pi]$. Арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $x \in [0; \pi]$, косинус которого равен a. Обозначение: $\arccos a$.

$$\arccos a = x \iff \cos x = a, \quad x \in [0; \pi]$$

Примеры: $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos(-1) = \pi$.

Арккосинус — функция чётная в смысле соотношения:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

Связь между арксинусом и арккосинусом одного и того же числа при $a \in [-1; 1]$ выражается тождеством:

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$$

Арктангенс. Функция $y = \operatorname{tg} x$ строго возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Арктангенсом числа $a \in \mathbb{R}$ называется такое число $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. Обозначение: $\operatorname{arctg} a$ (в англоязычной литературе — $\arctan$).

$$\operatorname{arctg} a = x \iff \operatorname{tg} x = a, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Примеры: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

Арктангенс — нечётная функция:

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

Аналогично определяется **арккотангенс**: $\operatorname{arcctg} a = x \iff \operatorname{ctg} x = a,\ x \in (0; \pi)$, причём $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Важное замечание: области определения функций $\arcsin$ и $\arccos$ ограничены отрезком $[-1; 1]$, тогда как arctg и arcctg определены на всей числовой прямой.

2. Простейшие тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Их теория опирается непосредственно на определения обратных тригонометрических функций.

2.1. Уравнение $\sin x = a$

Уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда $|a| \leq 1$.

- Если $|a| \leq 1$, все решения описываются формулой:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Эквивалентная запись через две серии:

$$x = \arcsin a + 2\pi n \quad \text{или} \quad x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Если $|a| > 1$, решений нет.

Частные случаи:

$$\sin x = 0 \iff x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2.2. Уравнение $\cos x = a$

Уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда $|a| \leq 1$. При выполнении этого условия:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1 \iff x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \iff x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2.3. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Уравнение имеет решения при любом $a \in \mathbb{R}$:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Аналогично, для $\operatorname{ctg} x = a$:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2.4. Методы решения тригонометрических уравнений

Сведение произвольных тригонометрических уравнений к простейшим осуществляется стандартными приёмами.

Алгебраическая замена. Уравнения, сводящиеся к квадратным относительно $\sin x$ или $\cos x$. Например, уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ заменой $t = \sin x$ сводится к квадратному $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t = \frac{1}{2}$ или $t = 2$; корень $t = 2$ отбрасывается, так как $|\sin x| \leq 1$, и остаётся $\sin x = \frac{1}{2}$.

Однородные уравнения. Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$ решаются делением на $\cos x$ (при условии $\cos x \neq 0$, что проверяется подстановкой) и сведением к $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$. Однородное уравнение второй степени $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ аналогично сводится к квадратному относительно $\operatorname{tg} x$.

Метод вспомогательного угла. Уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ при $a^2 + b^2 \neq 0$ приводится к виду:

$$\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi) = c, \quad \text{где } \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$.

Разложение на множители. Применение формул суммы и разности, формул понижения степени и формул произведения в сумму позволяет представить уравнение в виде произведения, равного нулю. Например:

$$\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x = 0$$

Следует подчеркнуть: при преобразованиях, связанных с делением или возведением в квадрат, необходим контроль равносильности, поскольку возможно появление посторонних корней или потеря решений.

3. Простейшие тригонометрические неравенства

Решение тригонометрических неравенств наиболее наглядно осуществляется с помощью единичной окружности. Функции синус и косинус периодичны с периодом 2π, функции тангенс и котангенс — с периодом π.

3.1. Неравенства вида $\sin x > a$ и $\sin x < a$

Множество точек единичной окружности, для которых ордината превышает число a при $|a| < 1$, представляет собой дугу окружности. Соответствующие решения:

$$\sin x > a \iff \arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

При $a = 1$ неравенство $\sin x > 1$ решений не имеет; $\sin x \geq 1$ равносильно $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

3.2. Неравенства вида $\cos x > a$ и $\cos x < a$

Множество точек с абсциссой, превышающей a:

$$\cos x > a \iff -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

3.3. Неравенства вида $\operatorname{tg} x > a$

На каждом интервале $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, где тангенс строго возрастает:

$$\operatorname{tg} x > a \iff \operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Аналогично:

$$\operatorname{tg} x < a \iff -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

3.4. Общая методика

При решении сложных тригонометрических неравенств применяется следующий порядок действий:

1. Неравенство приводится к простейшему виду относительно одной тригонометрической функции.
2. Определяется область допустимых значений (в частности, для неравенств с тангенсом и котангенсом исключаются точки, в которых функция не определена).
3. На единичной окружности выделяется множество решений простейшего неравенства.
4. Записывается ответ в виде объединения промежутков с учётом периода функции.

Метод интервалов после приведения к виду $f(x) > 0$, где f — комбинация тригонометрических функций, также применим; нули функции f на периоде определяют границы промежутков знакопостоянства.

Заключение

Теория тригонометрических уравнений и неравенств опирается на строгие определения обратных тригонометрических функций, введённые на промежутках монотонности основных тригонометрических функций. Формулы корней простейших уравнений являются непосредственным следствием этих определений, а методы сведения сложных уравнений к простейшим — замена переменной, разложение на множители, вспомогательный угол и однородность — образуют единый математический аппарат. Решение неравенств базируется на геометрической интерпретации тригонометрических функций посредством единичной окружности. Владение этим аппаратом составляет необходимую основу для изучения математического анализа и его приложений.