ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

# ЛЕКЦИЯ 7. ТЕМА 7. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## 1. Общее и частное решение дифференциальных уравнений

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) — уравнение, связывающее независимую переменную $x$, неизвестную функцию $y(x)$ и её производные до некоторого порядка $n$. Общий вид ОДУ $n$-го порядка:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Наиболее распространённой формой является разрешённое относительно старшей производной уравнение:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

**Общее решение** ОДУ $n$-го порядка — функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящая от $n$ произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$, которая при любых допустимых значениях этих постоянных удовлетворяет уравнению. Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости $(x, y)$.

**Частное решение** получается из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, \ldots, C_n$. Часто эти значения определяются из начальных условий (задача Коши):

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

При выполнении условий теоремы существования и единственности (условия Липшица по переменным $y, y', \ldots$) существует единственная интегральная кривая, проходящая через заданную точку с заданными значениями производных.

### Алгоритм получения частного решения из общего:

1. Найти общее решение ОДУ (аналитически или численно).
2. Записать начальные условия в виде системы уравнений относительно $C_1, \ldots, C_n$.
3. Подставить $x = x_0$ и соответствующие значения производных в общее решение и его производные.
4. Решить полученную систему уравнений относительно $C_1, \ldots, C_n$.
5. Подставить найденные значения в общее решение — получается частное решение.

## 2. Дифференциальные уравнения второго порядка

ОДУ второго порядка имеет вид:

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

или, если разрешено относительно второй производной:

$$y'' = f(x, y, y').$$

Общий вид линейного ОДУ второго порядка:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Если $g(x) \equiv 0$, уравнение называется **однородным**; если $g(x) \not\equiv 0$ — **неоднородным**.

Выделяют два важных частных случая:

- **Линейные уравнения с постоянными коэффициентами**: $a_i(x) = \text{const}$.
- **Уравнения, допускающие понижение порядка**: например, если в уравнении отсутствует $y$ или $y'$, либо уравнение не содержит явно $x$ или $y$.

## 3. Решение дифференциальных уравнений второго порядка

### 3.1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение:

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a \neq 0.$$

**Алгоритм решения:**

1. Составить характеристическое уравнение: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
2. Найти корни $\lambda_1, \lambda_2$ (действительные или комплексные).
3. Записать общее решение в зависимости от типа корней:
   - Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, оба действительные: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.
   - Если $\lambda_1 = \lambda_2$: $y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$.
   - Если корни комплексные: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, тогда $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$.
4. При наличии начальных условий подставить их и найти $C_1, C_2$.

**Пример**

Решить: $y'' - 5y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

1. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Корни: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.
2. Общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.
3. Найдём производную: $y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$.
4. Подставим начальные условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 2C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3,\ C_2 = -2.$$

5. Частное решение: $y = 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

**3.2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами**

Уравнение: $ay'' + by' + cy = g(x)$.

Общее решение складывается из общего решения однородного уравнения $y_h$ и частного решения неоднородного $y_p$:

$$y = y_h + y_p.$$

**Методы нахождения $y_p$:**

- **Метод неопределённых коэффициентов** (если $g(x)$ — многочлен, экспонента, синус/косинус, их комбинации).
- **Метод вариации произвольных постоянных** (универсальный, но более трудоёмкий).

**Алгоритм метода неопределённых коэффициентов:**

1. Решить однородное уравнение и получить $y_h$.
2. По виду $g(x)$ подобрать вид частного решения $y_p$ с неизвестными коэффициентами.
3. Подставить $y_p$ в исходное уравнение и приравнять коэффициенты при одинаковых функциях.
4. Найти неизвестные коэффициенты.
5. Записать общее решение $y = y_h + y_p$.
6. При необходимости подставить начальные условия и найти постоянные $C_1, C_2$.

**Пример**

Решить: $y'' + y = \sin x$.

1. Однородная часть: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
2. Правая часть — $\sin x$, который уже содержится в $y_h$, поэтому пробуем $y_p = x(A \cos x + B \sin x)$.
3. Вычисляем $y_p'$ и $y_p''$, подставляем в уравнение, приравниваем коэффициенты и находим $A = -\frac{1}{2}, B = 0$.
4. Частное решение: $y_p = -\frac{x}{2} \cos x$.
5. Общее решение: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$.

**3.3. Уравнения, допускающие понижение порядка**

Некоторые уравнения второго порядка можно свести к уравнению первого порядка заменой переменных.

**Типичные случаи:**

- Уравнение не содержит $y$: $F(x, y', y'') = 0$. Замена: $p = y'$, тогда $y'' = p'$. Получаем уравнение первого порядка относительно $p(x)$.
- Уравнение не содержит $x$: $F(y, y', y'') = 0$. Замена: $p = y'$, тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Получаем уравнение относительно $p(y)$.

**Алгоритм для случая без $x$:**

1. Положить $p = y'$.
2. Выразить $y''$ как $p\frac{dp}{dy}$.
3. Получить уравнение первого порядка для $p(y)$ и решить его.
4. Вернуться к $y'$: $y' = p(y)$, решить полученное уравнение.
5. Получить общее решение $y(x)$.

**Пример**

Решить: $yy'' = (y')^2$.

1. Замена: $p = y', y'' = p\frac{dp}{dy}$. Уравнение: $yp\frac{dp}{dy} = p^2$.
2. При $p \neq 0$: $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$, откуда $p = C_1 y$.
3. Возвращаемся: $y' = C_1 y$, отсюда $y = C_2 e^{C_1 x}$ (при $C_1 \neq 0$).
4. Также есть решение $y = \text{const}$ при $p = 0$.