ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 6. ТЕМА 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Вводные замечания

Тригонометрические преобразования представляют собой аппарат тождественных преобразований выражений, содержащих тригонометрические функции. Их теоретической основой служат формулы сложения аргументов, из которых путём алгебраических преобразований выводятся формулы суммы и разности, формулы произведения и универсальная подстановка через тангенс половинного аргумента. Методическая и вычислительная ценность указанных формул состоит в возможности приведения выражения к виду, удобному для исследования, упрощения или решения уравнений и неравенств.

Ниже всюду предполагается, что аргументы принимают значения, при которых соответствующие функции определены.

2. Формулы суммы и разности как исходная база

Все преобразования настоящего раздела выводятся из формул синуса и косинуса суммы и разности:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Формулы сложения доказываются аналитически (например, через скалярное произведение векторов единичной окружности или через формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$) и справедливы при всех действительных значениях аргументов.

3. Преобразование суммы (разности) в произведение

Складывая и вычитая почленно формулы сложения, получаем группу тождеств, известных как **формулы суммы в произведение** (в терминологии некоторых учебников — формулы прогрессивного преобразования):

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Действительно, например:

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

и применение формулы сложения с последующим сокращением даёт приведённое тождество. Знак «минус» в формуле для разности косинусов является принципиальным и часто оказывается источником ошибок при вычислениях.

Отметим также родственные тождества для тангенса и котангенса, получаемые делением соответствующих формул:

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\qquad \tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Практическое назначение формул данного пункта — разложение на множители. Например, выражение $\sin 3x+\sin 5x$ преобразуется к виду $2\sin 4x\cos x$, что позволяет выделить общий множитель и упростить уравнение $\sin 3x+\sin 5x=0$ до $\sin 4x\cos x=0$.

4. Преобразование произведения в сумму (разность)

Умножая почленно формулы сложения, получаем группу тождеств, называемых **формулами произведения в сумму** (ретрогрессивное преобразование):

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Эти тождества позволяют линейно выразить произведение тригонометрических функций через сумму функций кратных аргументов. Обратим внимание на структурное различие: в первом и втором тождествах слагаемые входят с одним знаком, в третьем — с противоположным; последний факт является прямым следствием чётности косинуса и нечётности синуса.

Формулы произведения в сумму находят применение:

- при вычислении определённых интегралов вида $\int \sin kx \cos nx\, dx$, где произведение заменяется суммой и интегрирование сводится к табличному;
- в гармоническом анализе при вычислении интегралов ортогональности тригонометрической системы, лежащих в основе разложения функций в ряды Фурье;
- при упрощении выражений, содержащих произведения функций с различными аргументами.

5. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

Положим $t = \operatorname{tan}\frac{\alpha}{2}$. Из формул двойного угла, записанных для аргумента $\frac{\alpha}{2}$, и основного тригонометрического тождества следуют тождества, называемые **универсальной тригонометрической подстановкой** (универсальной заменой):

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tan}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tan}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tan}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tan}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\operatorname{tan}\alpha = \frac{2\operatorname{tan}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tan}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Приведём вывод первой формулы. Разделим числитель и знаменатель тождества

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

почленно на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$; в результате получим $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tan}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tan}^2\frac{\alpha}{2}}$. Остальные формулы выводятся аналогично.

Формула для тангенса следует также из двойного угла: $\operatorname{tan}\alpha = \frac{2\operatorname{tan}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tan}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Ограничения применимости. Подстановка $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$ корректна лишь при значениях α, для которых $\dfrac{\alpha}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, то есть $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. В этих точках тангенс половинного аргумента не определён, и замена требует отдельного рассмотрения. Данное обстоятельство существенно при решении уравнений: потерянные решения вида $\alpha = \pi + 2\pi n$ подлежат проверке непосредственно в исходном уравнении.

Рационализирующий смысл замены. Универсальная подстановка переводит любую рациональную функцию от $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в рациональную функцию от t. Этим объясняется её название: она сводит широкий класс тригонометрических уравнений и интегралов к алгебраическим задачам. Вместе с тем степень получаемого рационального уравнения может оказаться выше, чем при других методах, поэтому подстановку целесообразно рассматривать как средство универсального, но не всегда оптимального характера.

В частности, при интегрировании выражений $R(\sin x, \cos x)$, где R — рациональная функция двух переменных, замена $t = \tan\dfrac{x}{2}$ даёт

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

и интеграл принимает вид $\displaystyle\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$ — интеграл от рациональной функции, вычисляемый стандартными методами.

6. Примеры применения

Пример 1. Упростим $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\cos\alpha$. Вынеся в знаменателе множитель и воспользовавшись формулой синуса двойного угла, получим

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Пример 2. Преобразуем произведение в сумму: $\sin 40^\circ\cos 20^\circ=\dfrac{1}{2}[\sin 20^\circ+\sin 60^\circ]$.

Пример 3. Выразим $\sin\alpha$ через $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$: тогда $t=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, откуда

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

что согласуется с табличным значением.

7. Замечания о взаимосвязи преобразований

Формулы рассмотренных групп не являются независимыми: формулы суммы в произведение и произведения в сумму взаимно обратны с точностью до замены аргументов, а универсальная подстановка выводится из формул двойного и половинного углов. В совокупности они образуют замкнутую систему тождественных преобразований, достаточную для приведения практически любого тригонометрического выражения к выбранному каноническому виду — сумме, произведению либо рациональной функции одного вспомогательного параметра. Выбор конкретного преобразования определяется структурой задачи: разложение на множители диктует переход от суммы к произведению, интегрирование и степенные оценки — обратный переход, а сведение к алгебре — универсальную замену.