ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 6. ТЕМА 6. ТЕОРИЯ РЯДОВ

1. Определение числового ряда. Свойства рядов

Определение числового ряда. Пусть задана последовательность действительных (или комплексных) чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

называется *числовым рядом*. Числа a_n называются *членами ряда*, а $a_1, a_2, \dots$ — его слагаемыми.

Для анализа ряда вводят *частичные суммы*:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N.$$

Ряд $\sum a_n$ называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S,$$

где S — *сумма ряда*. Если предел не существует или равен бесконечности, ряд называется *расходящимся*.

Основные свойства рядов.

1. *Линейность.* Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся к суммам A и B соответственно, то для любых констант $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) ряд $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ сходится к $\alpha A + \beta B$.
2. *Отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость.* Если из ряда удалить (или добавить) конечное число членов, сходимость или расходимость ряда не изменится, хотя сумма может измениться.
3. *Необходимый признак сходимости.* Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Обратное утверждение неверно: из стремления общего члена к нулю сходимость не следует (классический контрпример — гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$).

Алгоритм действий при первичном анализе числового ряда:

1. Выписать общий член ряда a_n.
2. Проверить выполнение необходимого признака: вычислить $\lim_{n\to\infty} a_n$. Если предел отличен от нуля или не существует, ряд расходится — исследование завершено.
3. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, перейти к применению достаточных признаков сходимости (см. раздел 3).

2. Функциональные последовательности и ряды

Функциональные последовательности. Пусть X — некоторое множество (часто интервал или область в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), и для каждого $n \in \mathbb{N}$ задана функция $f_n : X \to \mathbb{R}$. Тогда совокупность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется *функциональной последовательностью*.

Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится поточечно* к функции $f(x)$ на множестве X, если для каждого фиксированного $x \in X$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Более сильное понятие — *равномерная сходимость*. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к $f(x)$ на X, если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Функциональные ряды. Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots,$$

где каждое $u_n(x)$ — функция, определённая на множестве X, называется *функциональным рядом*. Его частичные суммы $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ образуют функциональную последовательность.

Сходимость функционального ряда понимается как сходимость последовательности его частичных сумм. Различают:

- *Поточечную сходимость*: для каждого $x \in X$ числовой ряд $\sum u_n(x)$ сходится.
- *Равномерную сходимость*: последовательность $S_N(x)$ сходится к предельной функции $S(x)$ равномерно на X.

Важнейший пример — степенные ряды. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

называется *степенным рядом* с центром в точке x_0. Для степенных рядов существует понятие *радиуса сходимости* $R \geq 0$, такого что:

- ряд сходится абсолютно при $|x - x_0| < R$;
- расходится при $|x - x_0| > R$;
- на границе $|x - x_0| = R$ поведение ряда требует отдельного исследования.

Радиус сходимости можно найти по формуле Коши–Адамара:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Либо, если предел отношения существует, по признаку Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Алгоритм анализа функционального ряда (в частности, степенного):

1. Записать общий член $u_n(x)$.
2. Если это степенной ряд, определить коэффициенты c_n и найти радиус сходимости R (по Коши–Адамару или Даламберу).
3. Исследовать сходимость на границах интервала $|x - x_0| = R$ отдельно (часто сводя к числовым рядам и применяя признаки из раздела 3).
4. Если ряд не степенной, сначала проверить поточечную сходимость для произвольного x, затем — равномерную (например, с помощью признака Вейерштрасса).

3. Исследование сходимости рядов

Для числовых рядов с неотрицательными членами применяют следующие достаточные признаки:

- **Признак сравнения.** Пусть $0 \le a_n \le b_n$ для всех n. Если $\sum b_n$ сходится, то сходится и $\sum a_n$. Если $\sum a_n$ расходится, то расходится и $\sum b_n$.
- **Предельный признак сравнения.** Если $a_n > 0, b_n > 0$ и существует конечный ненулевой предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$, то ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ либо оба сходятся, либо оба расходятся. В качестве «эталонных» рядов часто используют обобщённый гармонический ряд $\sum \frac{1}{n^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.
- **Признак Даламбера.** Для ряда с положительными членами $\sum a_n$, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho,$$

  то при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ — расходится. При $\rho = 1$ признак не даёт ответа.
- **Признак Коши (корневой).** Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho,$$

  то при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ — расходится; при $\rho = 1$ требуется дополнительное исследование.
- **Интегральный признак Коши.** Если $f(n) = a_n$ и функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает при $x \ge N$, то ряд $\sum a_n$ и несобственный интеграл $\int_N^\infty f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Для знакопеременных рядов применяют:

- **Признак Лейбница для знакочередующихся рядов.** Пусть ряд имеет вид $\sum (-1)^{n-1} a_n$, где $a_n > 0$. Если последовательность a_n монотонно убывает и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится. Более того, остаток ряда по модулю не превосходит первого отброшенного члена: $|R_N| \le a_{N+1}$.
- **Абсолютная и условная сходимость.** Ряд $\sum a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |a_n|$. Если ряд сходится, но не абсолютно, он называется *условно сходящимся*. Абсолютно сходящиеся ряды допускают перестановки членов без изменения суммы (теорема Римана для условно сходящихся рядов показывает, что при перестановке можно получить любую наперёд заданную сумму).

Универсальный алгоритм исследования сходимости числового ряда:

1. Проверить необходимый признак: $\lim a_n = 0$. Если нет — ряд расходится.
2. Определить тип ряда:
   - если члены неотрицательны — применить признаки сравнения, Даламбера, Коши, интегральный признак;
   - если ряд знакочередующийся — попробовать признак Лейбница;
   - если общий случай — проверить абсолютную сходимость через $\sum |a_n|$, затем при необходимости — условную.
3. При неопределённости ($\rho = 1$, $L = 1$ и т. п.) использовать более тонкие методы (уточнённое сравнение, асимптотические оценки, интегральный признак).

Для функциональных рядов ключевым является переход к числовым признакам в каждой точке и проверка равномерности:

- для степенных рядов — радиус сходимости + анализ границ;
- для общих функциональных рядов — признак Вейерштрасса: если $|u_n(x)| \leq M_n$ при всех $x \in X$, и $\sum M_n$ сходится, то ряд $\sum u_n(x)$ сходится равномерно на X.