ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 5. ТЕМА 4. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

1. Вводные замечания

Тригонометрические тождества представляют собой равенства, справедливые для всех значений аргументов, при которых определены входящие в них выражения. Совокупность таких тождеств образует аппарат, позволяющий преобразовывать тригонометрические выражения, упрощать уравнения и вычислять значения функций без обращения к таблицам.

Напомним базовые соотношения между основными тригономометрическими функциями, называемые фундаментальными тождествами:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\qquad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Первое из них — основное тригонометрическое тождество — является следствием теоремы Пифагора, применённой к единичной окружности. Остальные соотношения получаются алгебраически при условии, что знаменатели не обращаются в нуль.

Ниже рассматриваются четыре класса формул: формулы приведения, формулы сложения, формулы удвоенного и половинного аргумента.

2. Формулы приведения

Формулы приведения позволяют выразить значение тригонометрической функции аргумента вида $\frac{\pi}{2}n\pm\alpha$, где $n\in\mathbb{Z}$, через функции аргумента α. Их теоретическим основанием служат свойства периодичности, чётности и нечётности функций, а также симметрия единичной окружности.

Правило применения. При преобразовании аргумента вида $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi-\alpha$ действуют по двум правилам:

1. Если исходный аргумент содержит $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ (нечётное число четвертей $\pi/2$), функция заменяется на кофункцию: синус — на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс и наоборот. Если аргумент содержит π или 2π (целое число четвертей), название функции сохраняется.
2. Знак перед правой частью определяется знаком исходной функции при условии, что α — угол первой четверти.

Основные формулы приведения сведены в таблицу:

Аргумент	Синус	Косинус	Тангенс
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Формулы последней строки выражают периодичность: синус, косинус, тангенс и котангенс — периодические функции с периодом 2π (для тангенса и котангенса основной период равен π). Соотношения для $-\alpha$ выражают чётность косинуса и нечётность остальных функций.

3. Формулы сложения

Формулы сложения выражают тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов через функции этих аргументов.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta},\qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta}.$$

Тангенсные формулы справедливы при условии, что определены все входящие функции: $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и знаменатель отличен от нуля.

Замечание о доказательстве. Исторически и методически первичной является формула косинуса разности. Её вывод основан на определении координат точки единичной окружности: для двух радиус-векторов, образующих с осью абсцисс углы α и β, скалярное произведение, вычисленное в системе координат, повёрнутой на угол $-\beta$, даёт $\cos(\alpha-\beta)$, а в исходной системе — $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. Приравнивание этих выражений и даёт формулу. Остальные формулы сложения получаются из неё: формула синуса суммы следует из соотношения $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)$ с последующим применением формулы косинуса разности; формула косинуса суммы — заменой $\beta\mapsto-\beta$; тангенсные формулы — почленным делением синусовой формулы на косинусовую.

4. Формулы удвоенного аргумента

Формулы удвоения являются частным случаем формул сложения при $\beta = \alpha$.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Формулу косинуса удвоенного аргумента в силу основного тригонометрического тождества можно записать в двух эквивалентных формах:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Эти представления играют важную роль при понижении степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Из формулы синуса двойного аргумента при делении на $\cos^2\alpha$ (при $\cos\alpha \neq 0$) следует выражение $\operatorname{tg} 2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$. Отметим также связь с тангенсом половинного аргумента: $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

5. Формулы половинного аргумента

Формулы половинного аргумента выражают функции угла $\frac{\alpha}{2}$ через функции угла α. Они получаются из формул понижения степени заменой $\alpha \mapsto \frac{\alpha}{2}$:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

откуда

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Знак перед радикалом выбирается в зависимости от того, в какой координатной четверти лежит аргумент $\frac{\alpha}{2}$.

Формула для тангенса половинного аргумента:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

а также две формулы, свободные от знака радикала (справедливые при $\cos\alpha \neq 0$):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Последние две формулы удобны в вычислительной практике, поскольку не требуют анализа знака.

6. Систематизация и область применимости

Установим логическую связь между рассмотренными классами формул. Формулы сложения являются исходными: из них выводятся формулы удвоения (частный случай $\beta = \alpha$), из формул удвоения — формулы понижения степени, а из последних — формулы половинного аргумента. Формулы приведения, в свою очередь, опираются на свойства симметрии и периодичности и могут рассматриваться как следствия формул сложения: например, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \cos\alpha$.

Отметим типичные условия применимости, нарушение которых приводит к ошибкам:

- при использовании формул с радикалами (половинный угол) необходим учёт знака функции в соответствующей четверти;
- формулы, содержащие тангенс и котангенс, применимы лишь при тех значениях аргументов, при которых знаменатели не обращаются в нуль;
- деление обеих частей тождества на $\cos\alpha$ или $\sin\alpha$ допустимо только при условии, что эти величины отличны от нуля.

Рассмотренная система тождеств образует замкнутый аппарат преобразований, на котором основываются методы решения тригонометрических уравнений, доказательства неравенств, а также многочисленные приложения в математическом анализе — в частности, при интегрировании рациональных функций от синуса и косинуса универсальной тригонометрической подстановкой $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.