ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 5. ТЕМА 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Двойные интегралы и их свойства

Двойной интеграл является обобщением понятия определённого интеграла на функции двух переменных. Пусть задана ограниченная замкнутая область $D \subset \mathbb{R}^2$ и функция $f(x, y)$, определённая на этой области. Разобьём область D на n непересекающихся подобластей D_i, $i = 1, \ldots, n$, с площадями ΔS_i. В каждой подобласти выберем произвольную точку (ξ_i, η_i). Интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по области D называется выражение:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i.$$

Если при стремлении к нулю диаметра разбиения (максимального из диаметров подобластей) предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек, то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = \lim_{\max \operatorname{diam}(D_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i.$$

Основные свойства двойного интеграла:

- **Линейность.** Для любых констант α, β и интегрируемых функций f, g:

$$\iint\limits_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))\, dS = \alpha \iint\limits_D f(x, y)\, dS + \beta \iint\limits_D g(x, y)\, dS.$$

- **Аддитивность по области.** Если область D разбита на непересекающиеся подобласти D_1 и D_2, то:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS.$$

- **Монотонность.** Если $f(x,y) \le g(x,y)$ всюду на D, то:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS \le \iint\limits_D g(x,y)\,dS.$$

- **Оценка модуля.** Справедливо неравенство:

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dS\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,dS.$$

- **Геометрический смысл.** При $f(x,y) \ge 0$ двойной интеграл равен объёму цилиндрического тела, ограниченного сверху графиком функции, снизу — областью D, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz.

2. Повторные интегралы

Вычисление двойного интеграла часто сводится к вычислению повторных интегралов. Рассмотрим два типовых случая.

Область типа I (простая по y)

Область D задаётся неравенствами:

$$a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),$$

где φ_1, φ_2 — непрерывные функции. Тогда:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Здесь внутренний интеграл вычисляется по y при фиксированном x, затем результат интегрируется по x.

Область типа II (простая по x)

Область D задаётся:

$$c \le y \le d, \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y).$$

Тогда:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Алгоритм вычисления двойного интеграла через повторный:

1. **Построить область интегрирования D.** Начертить или мысленно представить границы области на плоскости Oxy.
2. **Определить тип области.** Установить, является ли область простой по y, по x или требует разбиения на части.
3. **Записать пределы интегрирования.** Выразить границы области в виде неравенств и определить пределы внутреннего и внешнего интегралов.
4. **Вычислить внутренний интеграл.** Проинтегрировать функцию по одной переменной, считая вторую переменной параметром.
5. **Вычислить внешний интеграл.** Подставить результат внутреннего интеграла и проинтегрировать по оставшейся переменной.
6. **Проверить результат.** При необходимости изменить порядок интегрирования и пересчитать для верификации.

Пример изменения порядка интегрирования. Если интеграл изначально записан как:

$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy,$$

то для смены порядка нужно:

- найти диапазон значений y во всей области: $[c,d]$;
- для каждого $y \in [c,d]$ определить диапазон x: $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$;
- записать повторный интеграл в новом порядке:

$$I = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

3. Приложения двойных интегралов

Двойные интегралы широко применяются в геометрии, физике и инженерных расчётах.

Геометрические приложения

- **Площадь плоской области.** Площадь области D выражается как:

$$S = \iint_D dS.$$

- **Объём тела.** Объём цилиндрического тела над областью D под графиком $z = f(x,y) \ge 0$:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dS.$$

Физические приложения

Пусть в области D распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$. Тогда:

- **Масса пластины:**

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,dS.$$

- **Статические моменты относительно осей:**

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)\,dS, \quad M_y = \iint_D x\rho(x,y)\,dS.$$

- **Координаты центра масс:**

$$x_c = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{M_x}{M}.$$

- **Момент инерции относительно оси Oz:**

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dS.$$

Алгоритм решения прикладной задачи с двойным интегралом:

1. **Формализовать задачу.** Определить, какая величина требуется (площадь, объём, масса, центр масс и т. п.).
2. **Выбрать подходящую формулу.** Использовать соответствующую интегральную формулу из списка выше.
3. **Задать область D и функцию подынтегрального выражения.** Указать границы области и, если требуется, плотность $\rho(x, y)$.
4. **Перейти к повторному интегралу.** Выбрать порядок интегрирования, удобный для данной области.
5. **Вычислить интеграл** по алгоритму из раздела 2.
6. **Проанализировать результат.** Проверить размерность, физический смысл и правдоподобность полученного значения.