ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 4. ТЕМА 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Радианная мера угла

Углы традиционно измеряются в градусах: полный оборот составляет 360°, прямое развёртывание полуокружности — 180°. Однако для математического анализа и приложений более естественной является **радианная мера**, тесно связанная с геометрией окружности.

Определение. Радианом называется центральный угол, опирающийся на дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности.

Из определения следует фундаментальное соотношение: если центральный угол радианной меры φ опирается на дугу длиной l в окружности радиуса r, то

$$\varphi = \frac{l}{r}, \qquad l = r\varphi.$$

Таким образом, радианная мера угла есть отношение длины стягиваемой дуги к радиусу. Поскольку это отношение безразмерно, радиан не является «физической» единицей в обычном смысле: он входит в международную систему единиц СИ как *дополнительная* (безразмерная) единица плоского угла, обозначаемая «рад».

Связь с градусной мерой устанавливается из того, что длина полуокружности равна πr. Следовательно, развёрнутому углу соответствует π радиан:

$$180^\circ = \pi \text{ рад}.$$

Отсюда получаются формулы перевода:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745 \text{ рад}, \qquad 1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Полный оборот соответствует 2π радиан. Приведём значения основных углов:

Угол в градусах	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Понятие угла произвольной величины. Если рассматривать угол как результат вращения луча, то вводится соглашение о знаке: вращение против часовой стрелки считается положительным направлением, по часовой стрелке — отрицательным. Начальное положение вращающегося луча — положительное направление оси абсцисс, конечное положение задаёт угол. При этом одному и тому же конечному положению луча соответствует бесконечное множество углов, отличающихся на целое число полных оборотов: углы α и $\alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, совпадают геометрически. Так угол перестаёт быть «геометрической фигурой» и становится числовой величиной, принимающей любые вещественные значения.

ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

2. Вращательное движение

Вращательным движением называется движение точки (или тела), при котором траектория представляет собой окружность, а расстояние до центра вращения постоянно. Вращательное движение широко распространено в природе и технике: вращение колёс, валов, турбин, планет вокруг осей.

Основными характеристиками вращательного движения являются:

Угловая скорость ω — физическая величина, равная отношению угла поворота φ к промежутку времени t, за который этот поворот совершён (при равномерном вращении):

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

В системе СИ угловая скорость измеряется в радианах в секунду (рад/с). Для равномерного вращения с частотой ν (числом оборотов в секунду) справедливо соотношение

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Период вращения T — время одного полного оборота; он связан с угловой скоростью формулой

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Линейная скорость точки, движущейся по окружности радиуса r, связана с угловой скоростью соотношением

$$v = \omega r.$$

Центростремительное (нормальное) ускорение точки выражается формулой

$$a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}.$$

Отметим принципиальную связь двух разделов: именно радианная мера делает формулы вращательного движения простыми и универсальными. Если бы угол измерялся в градусах, в формулу $l = r\varphi$ и в определение угловой скорости пришлось бы вводить переводной множитель $\pi/180$. Радианная мера устраняет эту несогласованность, чем и объясняется её повсеместное применение в физике и математическом анализе.

3. Единичная окружность и синус, косинус, тангенс, котангенс числа

Определение. Единичной окружностью называется окружность радиуса 1 с центром в начале координат плоскости Oxy. Её уравнение:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Пусть точка $M(\alpha)$ получена поворотом точки $P_0(1;0)$ — конца единичного вектора оси абсцисс — на угол α радиан. Абсциссу точки M обозначим x, ординату — y.

Определение. Синусом числа α называется ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки $(1;0)$ на угол α радиан:

$$\sin\alpha = y.$$

Косинусом числа α называется абсцисса этой точки:

$$\cos\alpha = x.$$

Так как точка $(x;y)$ лежит на единичной окружности, для любого вещественного α выполняется основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

а также неравенства $-1 \le \sin\alpha \le 1$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

Определение. Тангенсом числа α ($\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$) называется отношение синуса к косинусу:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Котангенсом числа α ($\alpha \ne \pi n, n \in \mathbb{Z}$) называется отношение косинуса к синусу:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Отсюда следуют тождества

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Существенно, что данные определения превращают синус, косинус, тангенс и котангенс в **функции числового аргумента**: их область определения — множество вещественных чисел (за вычетом точек, где тангенс и котангенс не определены), а не множество углов. Аргумент α при этом есть просто число — угол в радианах, длина дуги единичной окружности. Именно эта трактовка делает тригонометрические функции корректно определёнными на всей числовой прямой и обеспечивает их применимость в математическом анализе, где производная $(\sin x)' = \cos x$ справедлива лишь при радианном измерении аргумента.

4. Знаки и значения в координатных четвертях

Знаки функций определяются положением точки $M(\alpha)$ на окружности. При движении по окружности против часовой стрелки от точки $(1;0)$ выделяются четыре четверти:

Четверть	Интервал α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
I	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$+$	$+$	$+$
II	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$	$+$	$-$	$-$
III	$\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$
IV	$\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$	$-$	$+$	$-$

Значения функций для «табличных» углов получаются из геометрии прямоугольного треугольника и координат точек единичной окружности:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5. Периодичность и чётность

Поскольку полный оборот возвращает точку в исходное положение, тригонометрические функции обладают периодичностью. Наименьший положительный период синуса и косинуса равен 2π, тангенса и котангенса — π:

$$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha, \qquad \cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Из геометрического смысла вытекают формулы приведения, в частности:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Таким образом, синус — нечётная функция, косинус — чётная; тангенс и котангенс нечётны.

Выводы

Радианная мера угла задаёт взаимно однозначное соответствие между множеством углов и множеством вещественных чисел, устраняя произвольность градусной шкалы. Вращательное движение описывается угловыми характеристиками (ω, T), при этом именно радианы обеспечивают простоту соотношений $l = r\varphi$ и $v = \omega r$. Единичная окружность определяет синус и косинус как координаты точки, а тангенс и котангенс — как их отношения, превращая тригонометрию из геометрического учения об углах в теорию числовых функций. Понятия радиана, периодического вращения и тригонометрических функций образуют единый аппарат, лежащий в основе математического анализа, физики колебаний и волн и большинства технических дисциплин.