ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 4. ТЕМА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Пусть задана функция $f:\ D \to \mathbb{R}$, где $D \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$. Рассмотрим точку $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, являющуюся предельной точкой множества D.

Определение предела. Число A называется пределом функции $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $\mathbf{x} \in D$, удовлетворяющих условию $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$. Формально:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0):\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — стандартная евклидова норма в $\mathbb{R}^n$: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

Важное отличие от случая одной переменной: предел должен существовать и быть одинаковым при стремлении к точке $\mathbf{a}$ по любым возможным траекториям (прямым, кривым, спиралям и т. д.). Если при приближении по разным путям получаются разные значения, предел не существует.

Пример проверки несуществования предела. Пусть $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ и $\mathbf{a} = (0, 0)$.

- При движении вдоль прямой $y = kx$: $f(x, kx) = \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$ — зависит от k. Следовательно, предел при $(x, y) \to (0, 0)$ не существует.

Непрерывность функции нескольких переменных. Функция f непрерывна в точке $\mathbf{a} \in D$, если:

1. f определена в некоторой окрестности точки $\mathbf{a}$;
2. Существует $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$;
3. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Функция называется непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Алгоритм проверки непрерывности в точке:

1. Убедиться, что функция определена в данной точке $\mathbf{a}$.
2. Проверить существование предела $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$. Для этого:
   - попробовать вычислить предел по стандартным направлениям (координатным осям, прямым $y = kx$, кривым $y = x^2$ и т. п.);
   - если значения различаются — предел не существует, функция разрывна;
   - если все проверенные пути дают одно и то же значение A, попытаться доказать, что предел равен A, используя определение или теоремы (например, оценку модуля разности $|f(\mathbf{x}) - A|$ через норму $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$).
3. Сравнить найденный предел со значением функции в точке: если они совпадают — функция непрерывна.

2. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных

Частные производные. Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки $\mathbf{a}$. Частная производная функции f по переменной x_i в точке $\mathbf{a}$ определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h},$$

при условии существования этого предела.

Частные производные характеризуют скорость изменения функции при изменении одной переменной при фиксированных остальных.

Градиент. Вектор, составленный из частных производных, называется градиентом функции:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Дифференцируемость. Функция f дифференцируема в точке $\mathbf{a}$, если её приращение можно представить в виде:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) h_i + o(\|\mathbf{h}\|), \quad \text{при } \mathbf{h} \to 0,$$

где $o(\|\mathbf{h}\|)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\|\mathbf{h}\|$.

Эквивалентно: существует линейный функционал (дифференциал df), такой что:

$$\Delta f = df + o(\|\mathbf{h}\|).$$

Дифференциал выражается через частные производные:

$$df(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) dx_i.$$

Достаточное условие дифференцируемости. Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существуют в некоторой окрестности точки $\mathbf{a}$ и непрерывны в самой точке $\mathbf{a}$, то функция f дифференцируема в $\mathbf{a}$.

Важное замечание. Существование всех частных производных в точке не гарантирует дифференцируемость. Пример: функция $f(x, y)$, равная 0 на осях и 1 вне осей, имеет нулевые частные производные в $(0, 0)$, но не является дифференцируемой.

Алгоритм проверки дифференцируемости в точке:

1. Вычислить все частные производные первого порядка в точке $\mathbf{a}$.
2. Если хотя бы одна частная производная не существует — функция не дифференцируема.
3. Если все частные производные существуют, проверить их непрерывность в окрестности $\mathbf{a}$:
   - если они непрерывны — функция дифференцируема;
   - если нет — проверить определение дифференцируемости напрямую: рассмотреть разность $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$ и сравнить с линейной формой $\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$, оценив остаток $R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$.
4. Для дифференцируемости необходимо, чтобы $\frac{|R(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \to 0$ при $\mathbf{h} \to 0$.

3. Производные высших порядков и дифференциалы высших порядков

Частные производные второго порядка. Для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно вычислять вторые частные производные по каждой паре переменных:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ — вторые производные по одной и той же переменной;
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ — смешанные производные.

Если смешанные производные непрерывны, то они не зависят от порядка дифференцирования (теорема Шварца):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Матрица Гессе. Матрица вторых частных производных:

$$H_f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{i,j=1}^{n}.$$

Она симметрична при условии непрерывности вторых производных.

Дифференциалы высших порядков. Дифференциал второго порядка определяется как дифференциал от первого дифференциала:

$$d^2 f = d(df).$$

В случае двух переменных (x, y) при постоянных вторых производных:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Аналогично строятся дифференциалы более высоких порядков.

Алгоритмы действий:

Для вычисления вторых производных:

1. Найти все частные производные первого порядка.
2. Продифференцировать каждую из них по всем переменным, получая вторые производные.
3. Проверить равенство смешанных производных (если требуется).

Для построения дифференциала второго порядка:

1. Записать $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.
2. Вычислить $d(df)$, применяя правила дифференцирования, считая dx_i константами.
3. Привести подобные слагаемые и записать результат в виде квадратичной формы.