ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 4. ТЕМА 4. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (ДАЛЕЕ - НСВ)

1. Понятие непрерывной случайной величины. Равномерно распределённая НСВ. Геометрическое определение вероятности

Понятие непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина — это случайная величина, множество возможных значений которой образует непрерывный интервал (или объединение интервалов) на числовой прямой. В отличие от дискретной случайной величины, НСВ принимает несчётное множество значений, и вероятность попадания в любую отдельно взятую точку равна нулю: $P(X = x) = 0$.

Для описания НСВ используют:

- функцию распределения $F(x) = P(X \leq x)$ — неубывающую функцию, непрерывную слева, с пределами $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
- плотность распределения $f(x)$, если она существует: $f(x) = F'(x)$ почти всюду. Плотность удовлетворяет условиям: $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Вероятность попадания НСВ в интервал $[a, b]$ выражается через плотность:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Равномерно распределённая непрерывная случайная величина

НСВ X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, если её плотность постоянна на этом отрезке и равна нулю вне него:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Основные числовые характеристики:

- математическое ожидание: $E[X] = \frac{a+b}{2}$;
- дисперсия: $D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Алгоритм вычисления вероятностей для равномерного распределения:

1. Убедиться, что $X \sim U[a, b]$.
2. Определить границы интересующего интервала $[c, d]$.
3. Найти пересечение $[c, d]$ с $[a, b]$. Пусть это будет $[\max(a, c), \min(b, d)]$. Если пересечение пусто, вероятность равна 0.
4. Вычислить: $P(c \leq X \leq d) = \frac{\min(b,d) - \max(a,c)}{b-a}$, если числитель неотрицателен.
5. Проверить, что результат лежит в $[0, 1]$.

Геометрическое определение вероятности

Геометрическая вероятность применяется в задачах, где пространство элементарных исходов можно представить как геометрическое множество (отрезок, область на плоскости, тело в пространстве), а вероятность события пропорциональна мере (длине, площади, объёму).

Пусть Ω — геометрическое множество меры $M(\Omega)$, а событие A — подмножество Ω меры $M(A)$. Тогда вероятность события A определяется как:

$$P(A) = \frac{M(A)}{M(\Omega)},$$

при условии, что $M(\Omega) > 0$.

Пример: точка бросается наудачу на отрезок $[a, b]$. Вероятность попасть в подотрезок $[c, d] \subseteq [a, b]$ равна отношению длин:

$$P = \frac{d - c}{b - a}.$$

Это согласуется с равномерным распределением на отрезке.

Алгоритм применения геометрического определения вероятности:

1. Формализовать задачу: определить геометрическое пространство исходов Ω.
2. Выбрать подходящую меру: длина, площадь, объём.
3. Описать событие A как подмножество Ω, вычислить его меру $M(A)$.
4. Вычислить $P(A) = M(A)/M(\Omega)$.
5. Проверить корректность: $0 \leq P(A) \leq 1$, инвариантность относительно выбора системы координат (если применимо).

2. Центральная предельная теорема

Формулировка классической центральной предельной теоремы (ЦПТ)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с конечным математическим ожиданием $E[X_i] = \mu$ и конечной дисперсией $D[X_i] = \sigma^2 > 0$. Тогда при $n \to \infty$ распределение нормированной суммы стремится к стандартному нормальному распределению:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

где $\xrightarrow{d}$ обозначает сходимость по распределению.

Это означает, что для достаточно больших n распределение суммы S_n можно приближать нормальным распределением:

$$S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2).$$

Практическое следствие:

Для выборочного среднего $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ справедливо:

$$\bar{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Условия и ограничения применения ЦПТ

- Независимость слагаемых.
- Одинаковое распределение (в классической формулировке). Существуют обобщения для неодинаково распределённых величин (например, условие Линдеберга).
- Конечность дисперсии. При бесконечной дисперсии предельное распределение может быть устойчивым, но не нормальным.
- «Достаточная» величина n. На практике часто используют $n \geq 30$ как эвристическое правило, но это зависит от формы исходного распределения. Для сильно асимметричных или с тяжёлыми хвостами распределений требуется большее n.

Алгоритмы действий при применении ЦПТ

Для приближённого расчёта вероятности суммы:

1. Проверить условия: независимость, одинаковость распределения, конечность μ и σ^2.
2. Вычислить параметры: n, μ, σ.
3. Нормировать сумму: $Z = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.
4. Использовать стандартное нормальное распределение: $P(S_n \leq s) \approx \Phi\left(\frac{s-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$, где Φ — функция распределения $N(0,1)$.
5. При необходимости применить поправку на непрерывность (для дискретных исходных величин).
6. Проверить разумность результата и чувствительность к n.

Для выборочного среднего:

1. Определить n, μ, σ.
2. Нормировать: $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.
3. Вычислить вероятности через Φ.
4. Интерпретировать результат как приближение, указать на возможную погрешность при малых n или экстремальных хвостах.