ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 3. ТЕМА 2. КОРНИ, СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ

1. Степень с натуральным показателем

Пусть a — действительное число, n — натуральное число. Степенью числа a с натуральным показателем n называется выражение a^n, определяемое равенством

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \qquad a^1 = a.$$

Число a называется основанием степени, n — показателем. Для любой пары натуральных чисел m, n справедливы тождества:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ (m > n,\ a \neq 0), \qquad (a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ (b \neq 0).$$

Дополнение натуральных показателей нулём и целыми отрицательными числами осуществляется аксиоматически: полагают $a^0 = 1$ при $a \neq 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ при $a \neq 0$; выражение 0^0 не определено.

2. Корни натуральной степени из числа

2.1. Определение

Корнем n-й степени из неотрицательного числа a ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$) называется неотрицательное число x, n-я степень которого равна a:

$$x^n = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}.$$

Число n называется показателем корня, число a — подкоренным выражением. Корень второй степени называется квадратным, третьей — кубическим. При $n = 2$ показатель корня опускается: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.

2.2. Существование и количество корней

Из непрерывности функции $f(x) = x^n$ следует: если n чётно и $a \geq 0$, уравнение $x^n = a$ имеет на множестве неотрицательных чисел единственный неотрицательный корень, которому сопоставлен также корень противоположного знака; если n нечётно, уравнение $x^n = a$ имеет единственный корень при любом $a \in \mathbb{R}$. Поэтому при нечётном n вводится корень из отрицательного числа по правилу

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, \qquad n \text{ нечётно}, \ a \geq 0.$$

При чётном n корень из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует.

Арифметический корень n-й степени из неотрицательного числа a — единственный неотрицательный корень уравнения $x^n = a$. В записи $\sqrt[n]{a}$ при $a \geq 0$ всегда понимается именно арифметический корень.

2.3. Свойства арифметических корней

При $a \geq 0, \ b \geq 0, \ n, k \in \mathbb{N}$ справедливы тождества:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \neq 0),$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, \qquad \sqrt[nk]{a^{nk}} = a,$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \ (k \in \mathbb{N}), \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Значение арифметического корня является неубывающей функцией подкоренного выражения. При возведении обеих частей равенства в чётную степень следует учитывать ограничение: $\sqrt{x^2} = |x|$ — универсальная формула, замена её на x допустима лишь при $x \geq 0$. Нечётная степень избавляет от модуля: $\sqrt[3]{x^3} = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

3. Степени с рациональным показателем

3.1. Определение

Пусть $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Степенью числа a с рациональным показателем m/n называется число

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Корректность определения устанавливается теоремой: значение $\sqrt[n]{a^m}$ не зависит от выбора несократимой дроби, представляющей рациональное число, поскольку $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$. При $a > 0$ степень a^r определена для каждого $r \in \mathbb{Q}$. Для $a = 0$ полагают $0^r = 0$ при $r > 0$; степени с отрицательным основанием определяются лишь для целых рациональных показателей.

3.2. Свойства степеней с рациональными показателями

При $a, b > 0$ и любых $r, s \in \mathbb{Q}$:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \qquad (a^r)^s = a^{rs},$$

$$(ab)^r = a^r b^r, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Таким образом, все законы действия над степенями с целыми показателями переносятся на рациональные показатели, что и служит теоретическим обоснованием расширения понятия степени.

3.3. Монотонность

Для $a > 1$ функция $r \mapsto a^r$ строго возрастает на $\mathbb{Q}$; для $0 < a < 1$ — строго убывает. Это свойство лежит в основе сравнения степеней с рациональными показателями и сохраняется при предельном переходе к действительным показателям.

4. Степени с действительным показателем

4.1. Определение

Определение опирается на теорему о непрерывности: для любого $a > 1$ последовательность a^{r_n}, где $r_n \in \mathbb{Q}$ и $r_n \to x$, имеет предел, не зависящий от выбора последовательности r_n. Этот предел принимается за значение степени a^x:

$$a^x = \lim_{r_n \to x,\ r_n \in \mathbb{Q}} a^{r_n}.$$

Для $0 < a < 1$ полагают $a^x = (1/a)^{-x}$. Тем самым функция $f(x) = a^x$ определена на всём множестве действительных чисел при каждом $a > 0,\ a \neq 1$ и называется показательной функцией с основанием a.

4.2. Свойства степени с действительным показателем

При $a, b > 0$ и любых $x, y \in \mathbb{R}$ сохраняются все тождества:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy},$$

$$(ab)^x = a^x b^x, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Показательная функция $y = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$, строго возрастает при $a > 1$, строго убывает при $0 < a < 1$, постоянна при $a = 1$. Её область значений — множество положительных чисел: $\{y \mid y > 0\}$. Основание степени принято ограничивать условием $a \neq 1$, поскольку при $a = 1$ функция вырождается в константу и обратная к ней функция не существует.

Важнейшее частное значение: число Эйлера $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828\ldots$, определяющее основание натуральной показательной функции $e^x = \exp(x)$.

5. Логарифмы

5.1. Определение

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0,\ a \neq 1$, называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b:

$$\log_a b = c \quad \Longleftrightarrow \quad a^c = b, \qquad b > 0.$$

Из определения непосредственно следует основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b, \qquad b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Тождественный смысл тождества состоит в том, что операции возведения в степень и логарифмирования по одному основанию взаимно обратны. Логарифм определён только для положительных чисел; при $a = 1$ логарифм не существует, так как $1^c = 1$ при любом c.

5.2. Основные свойства логарифмов

При $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$ и любом действительном α справедливы тождества:

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1, \qquad \log_a a^\alpha = \alpha,$$

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c,$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b,$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b \ (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2).$$

Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей, логарифм частного — разности логарифмов, логарифм степени — произведению показателя на логарифм основания степени. Все свойства вытекают из тождества $b = a^{\log_a b}$ и законов действия над степенями.

5.3. Формула перехода к новому основанию

Пусть $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$. Тогда

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Доказательство основано на тождествах $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$, получаемых логарифмированием равенства $\left(a^{\log_a b}\right) = b$ по основанию c. Частные случаи:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (\log_a b \cdot \log_b a = 1),$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b, \qquad \log_{a^n} b^n = \log_a b.$$

Формула перехода позволяет свести вычисление логарифма по произвольному основанию к логарифмам по любому удобному основанию.

5.4. Десятичные и натуральные логарифмы

Десятичным логарифмом называется логарифм по основанию 10; его обозначение — $\lg b$. Натуральным логарифмом называется логарифм по основанию e; его обозначение — $\ln b$.

$$\lg b = \log_{10} b, \qquad \ln b = \log_e b.$$

Связь между ними устанавливается формулой перехода:

$$\ln b = \frac{\lg b}{\lg e}, \qquad \lg b = \frac{\ln b}{\ln 10}, \qquad \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343, \qquad \ln 10 \approx 2{,}3026.$$

Натуральный логарифм занимает центральное место в математическом анализе: функция $\ln x$ является первообразной для $1/x$ на множестве $x > 0$ и определена как площадь криволинейной трапеции под гиперболой $y = 1/t$ на отрезке $[1; x]$. Десятичные логарифмы исторически применялись в вычислительной практике и сохраняют значение в инженерных приложениях (шкала децибел, шкала pH).

5.5. Логарифмическая функция и монотонность

Функция $y = \log_a x$ определена при $x > 0$, её область значений — всё множество действительных чисел. Она строго возрастает при $a > 1$ и строго убывает при $0 < a < 1$. График логарифмической функции симметричен графику показательной функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$, что отражает взаимную обратность этих функций. Ключевые неравенства, непосредственно используемые при решении уравнений и неравенств:

- при $a > 1$: $\log_a x > c \iff x > a^c$ (при $x > 0$);
- при $0 < a < 1$: $\log_a x > c \iff 0 < x < a^c$.

6. Преобразование алгебраических выражений

6.1. Рациональные выражения

Рациональным называется выражение, составленное из чисел и переменных с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень. Основные приёмы преобразования: приведение к общему знаменателю, разложение на множители с применением формул сокращённого умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3,$$

а также теоремы о корнях квадратного уравнения: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$. При преобразовании дробей существенны условия допустимости значений переменных: знаменатель отличен от нуля, подкоренные выражения чётных корней неотрицательны, основания логарифмов и логарифмируемые выражения положительны.

6.2. Иррациональные выражения

Иррациональными называются выражения, содержащие корни натуральной степени из переменных. Основные тождества преобразования:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x\ (x \geq 0), \qquad \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}\ (x, y \geq 0),$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}\ (x \geq 0).$$

Типовой приём — освобождение от иррациональности в знаменателе умножением на сопряжённое выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}\ (a \neq b).$$

Переход к степеням с дробными показателями позволяет свести преобразования корней к действиям над степенями и существенно упрощает выкладки: например,

$$\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2} = x^{1/2} \cdot x^{2/3} = x^{7/6}.$$

6.3. Степенные и показательные выражения

Преобразование степенных выражений опирается исключительно на законы действия над степенями; типовые приёмы — вынесение общего множителя, замена $a^x = t$, представление составных оснований через простые:

$$8^x = 2^{3x}, \qquad 0{,}5^x = 2^{-x}, \qquad a^{x^2-1} = a^{x-1}a^{x+1}.$$

Для показательных уравнений вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a > 0,\ a \neq 1$ равносильным переходом служит равенство показателей: $f(x) = g(x)$.

6.4. Логарифмические выражения

Преобразования логарифмических выражений опираются на свойства из раздела 5.2 и формулу перехода. Типовые приёмы:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc), \qquad \log_a^2 b - \log_a^2 c = \log_a(bc) \cdot \log_a \frac{b}{c},$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

При решении логарифмических уравнений требуется проверка области определения: все выражения под логарифмами и все основания должны быть положительны, основания — отличны от единицы. Потенцирование (переход от равенства логарифмов к равенству аргументов) допустимо лишь при выполнении этих условий, иначе возникает посторонний корень.

7. Замечания о взаимных связях

Корни, степени и логарифмы образуют единую систему понятий. Корень n-й степени определяется как решение уравнения $x^n = a$; рациональная степень — обобщение корня; действительная степень — предел рациональных степеней; логарифм — обратная операция к возведению в действительную степень. Теорема о существовании и единственности логарифма следует из строгой монотонности и непрерывности показательной функции: для любого $b > 0$ и основания $a > 0,\ a \neq 1$ уравнение $a^x = b$ имеет единственный действительный корень $x = \log_a b$.

Фундаментальное тождество, связывающее все три объекта:

$$x = a^y \quad \Longleftrightarrow \quad y = \log_a x, \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

Эта эквивалентность служит теоретической основой всей теории показательных и логарифмических уравнений, неравенств и преобразований выражений.