ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 3. ТЕМА 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Неопределённый и определённый интеграл и их свойства

Неопределённый интеграл. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке I. Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на I, если для всех $x \in I$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I называется неопределённым интегралом от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Основные свойства неопределённого интеграла:

- Линейность: $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Производная интеграла: $\frac{d}{dx} \int f(x)\,dx = f(x)$.
- Интеграл производной: $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$.

Определённый интеграл. Определённый интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ определяется как предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю (при условии существования такого предела). Формально:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Свойства определённого интеграла:

- Аддитивность по промежутку: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$.
- Линейность: $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$.
- Если $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- Оценка интеграла: если $m \leq f(x) \leq M$ на $[a, b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

Фундаментальная связь между неопределённым и определённым интегралами — формула Ньютона–Лейбница. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $F(x)$ — её первообразная, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Алгоритм нахождения определённого интеграла через первообразную:

1. Найти неопределённый интеграл $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.
2. Записать разность значений первообразной на концах отрезка: $F(b) - F(a)$.
3. Вычислить полученное выражение.

2. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Несобственные интегралы обобщают понятие определённого интеграла на случаи, когда либо пределы интегрирования бесконечны, либо подынтегральная функция имеет разрывы.

Рассмотрим несобственные интегралы первого рода (с бесконечными пределами). Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[a, A]$, где $A > a$. Тогда несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом определяется как:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует и конечен, говорят, что несобственный интеграл **сходится**; в противном случае — **расходится**.

Аналогично,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty} \int_B^b f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

причём последний интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба слагаемых.

Признаки сходимости. Для неотрицательных функций $f(x) \geq 0$ часто применяют признак сравнения:

- Если $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $x \geq a$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится.
- Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится.

Часто используют эталонный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad \text{сходится при } p > 1,\ \text{расходится при } p \leq 1.$$

Алгоритм исследования несобственного интеграла на сходимость:

1. Записать определение несобственного интеграла как предела обычного определённого интеграла.
2. Вычислить внутренний интеграл как функцию верхнего предела.
3. Исследовать предел при стремлении предела интегрирования к бесконечности.
4. Сделать вывод о сходимости/расходимости. При необходимости применить признаки сравнения или предельный признак сравнения.

3. Вычисление определённых интегралов. Применение определённых интегралов

Методы вычисления определённых интегралов.

1. **Непосредственное применение формулы Ньютона–Лейбница** после нахождения первообразной.
2. **Метод замены переменной.** Если $x = \varphi(t)$, где φ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[\alpha, \beta]$, причём $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

   Важно: при замене переменной пределы интегрирования пересчитываются, константа C не нужна.
3. **Интегрирование по частям.** Для функций $u(x), v(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$, справедливо:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Алгоритм вычисления определённого интеграла методом замены переменной:

1. Выбрать подходящую замену $x = \varphi(t)$.
2. Выразить $dx = \varphi'(t)\,dt$ и подынтегральную функцию через t.
3. Пересчитать пределы интегрирования: $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$.
4. Вычислить новый интеграл по t на отрезке $[\alpha, \beta]$.
5. Получить численный результат.

Применение определённых интегралов:

- **Площадь криволинейной трапеции.** Площадь фигуры, ограниченной графиком $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a, x = b$ (при $f(x) \geq 0$), равна

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

- **Длина дуги кривой.** Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, где f непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, длина дуги равна

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

- **Объём тела вращения.** Объём тела, полученного вращением графика $y = f(x)$ вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

- **Работа переменной силы.** Если сила $F(x)$ действует вдоль оси Ox на отрезке $[a, b]$, работа равна

$$A = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Алгоритм решения прикладной задачи с помощью определённого интеграла:

1. Определить физическую или геометрическую величину, которую нужно найти.
2. Разбить объект на элементарные части, для которых можно записать элементарную величину (например, элементарную площадь, работу и т.д.).
3. Записать выражение для элементарной величины через dx.
4. Просуммировать (перейти к интегралу) и записать определённый интеграл с соответствующими пределами.
5. Вычислить интеграл подходящим методом.
6. Проверить размерность и правдоподобность результата.