ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 3. ТЕМА 3. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (ДСВ)

1. Дискретная случайная величина (ДСВ)

Дискретной случайной величиной называют случайную величину, принимающую конечное либо счётное множество значений. Формально, пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ является дискретной, если множество её возможных значений $\{x_1, x_2, \dots\}$ конечно или счётно, а для каждого x_i определена вероятность $P(X = x_i) = p_i$, причём $p_i \geq 0$ и $\sum_i p_i = 1$.

Закон распределения ДСВ — это соответствие между возможными значениями x_i и их вероятностями p_i. Его можно задать:

- таблично: в первой строке — значения x_i, во второй — соответствующие p_i;
- аналитически: формулой $P(X = x_i) = f(i)$;
- графически: многоугольником распределения (см. п. 2).

Алгоритм построения закона распределения ДСВ:

1. Определить множество возможных исходов эксперимента и выделить среди них значения, которые принимает случайная величина.
2. Сгруппировать эти значения в набор $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (или бесконечную последовательность, если ДСВ счётна).
3. Для каждого x_i вычислить вероятность $p_i = P(X = x_i)$, используя базовые правила теории вероятностей (классическое определение, формулы комбинаторики, условные вероятности и т. д.).
4. Проверить условие нормировки: $\sum p_i = 1$. Если сумма не равна 1, перепроверить вычисления.
5. Представить результат в виде таблицы, формулы или графика.

2. Графическое изображение распределения ДСВ. Функции от ДСВ

Графическое представление распределения ДСВ осуществляется посредством многоугольника распределения (полигона вероятностей). По оси абсцисс откладывают значения x_i, по оси ординат — соответствующие вероятности p_i. Точки (x_i, p_i) соединяют отрезками прямых. Полученная ломаная линия наглядно демонстрирует структуру распределения и позволяет оценить его асимметрию, модальность и другие особенности.

Пусть $Y = g(X)$ — функция от ДСВ X. Тогда Y также является ДСВ, принимающей значения $y_j = g(x_i)$ с вероятностями, равными суммам вероятностей тех x_i, для которых $g(x_i) = y_j$. Если функция g инъективна, то вероятности переносятся напрямую; если нет — вероятности объединяются.

Алгоритм нахождения распределения функции от ДСВ:

1. Записать закон распределения исходной ДСВ X: значения x_i и вероятности p_i.
2. Вычислить значения $y_j = g(x_i)$ для всех x_i.
3. Сгруппировать одинаковые значения y_j и просуммировать соответствующие вероятности.
4. Получить таблицу распределения Y: пары $(y_j, P(Y = y_j))$.
5. Проверить нормировку: $\sum P(Y = y_j) = 1$.
6. При необходимости построить многоугольник распределения для Y.

3. Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение ДСВ

Математическое ожидание ДСВ X, принимающей значения x_i с вероятностями p_i, определяется как:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i.$$

Оно характеризует среднее значение ДСВ и служит центром распределения.

Дисперсия ДСВ:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = \sum_i (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Альтернативная вычислительная формула:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2, \quad \text{где } M(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i.$$

Среднеквадратическое отклонение (СКО):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Оно имеет ту же размерность, что и сама случайная величина, и интерпретируется как средняя величина отклонения значений X от её математического ожидания.

Алгоритмы вычислений:

- **Для математического ожидания:**
  1. Умножить каждое значение x_i на соответствующую вероятность p_i.
  2. Просуммировать полученные произведения.
  3. Результат — $M(X)$.
- **Для дисперсии (через вторую формулу):**
  1. Вычислить $M(X)$ по алгоритму выше.
  2. Возвести каждое x_i в квадрат и умножить на p_i, просуммировать — получить $M(X^2)$.
  3. Вычислить разность $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.
- **Для СКО:**
  1. Извлечь квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

4. Понятие биномиального распределения, характеристики

Биномиальное распределение описывает число успехов в серии из n независимых испытаний Бернулли, в каждом из которых вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи — $q = 1 - p$. ДСВ $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ принимает целые значения от 0 до n.

Вероятность того, что $X = k$:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний.

Характеристики биномиального распределения:

- Математическое ожидание: $M(X) = np$.
- Дисперсия: $D(X) = np(1-p)$.
- СКО: $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Алгоритм решения типовых задач на биномиальное распределение:

1. Убедиться, что условия соответствуют схеме Бернулли: независимость испытаний, постоянная вероятность успеха, два исхода (успех/неудача).
2. Определить параметры n и p.
3. Выбрать требуемую характеристику: вероятность $P(X = k)$, математическое ожидание, дисперсию или интервал вероятностей.
4. Для $P(X = k)$ использовать формулу биномиального распределения.
5. Для числовых характеристик применить формулы $M(X) = np$, $D(X) = np(1-p)$, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.
6. Для вероятностей вида $P(a \le X \le b)$ просуммировать $P(X = k)$ по k от a до b.

5. Понятие геометрического распределения, характеристики

Геометрическое распределение описывает номер первого успеха в последовательности независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. ДСВ $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ принимает значения $k = 1, 2, 3, \ldots$

Вероятность:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Характеристики геометрического распределения:

- Математическое ожидание: $M(X) = \frac{1}{p}$.
- Дисперсия: $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- СКО: $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$.

Алгоритм решения задач на геометрическое распределение:

1. Проверить, что эксперимент соответствует описанию: независимые испытания, постоянная вероятность успеха p, интересует номер первого успеха.
2. Определить параметр p.
3. Если требуется $P(X = k)$, подставить в формулу $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$.
4. Если требуется числовая характеристика, использовать формулы для $M(X), D(X), \sigma(X)$.
5. Если требуется вероятность события вида $P(X > k)$ или $P(X \geq k)$, использовать свойство отсутствия последействия: $P(X > k) = (1-p)^k$.