ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

# ЛЕКЦИЯ 2. ТЕМА 1. РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

Понятие числа — одна из фундаментальных абстракций математики, исторически сложившаяся в результате длительного обобщения практического опыта человечества. Эволюция числовых систем от натуральных чисел до комплексных отражает внутреннюю логику развития математики: каждая новая система чисел возникала как расширение предыдущей для устранения неразрешимости определённых классов задач.

## 1. Натуральные числа как исходная основа

Исторически первой числовой системой стало множество натуральных чисел

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

возникшее в результате процесса счёта предметов. Натуральные числа замкнуты относительно сложения и умножения, однако уже на уровне простейших задач (деление количества предметов на равные части, вычитание большего из меньшего) их оказывается недостаточно. Это противоречие послужило первым импульсом к расширению понятия числа.

## 2. Целые и рациональные числа

Введение отрицательных чисел, нуля и противоположных им по операции вычитания чисел приводит к множеству целых чисел

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Целые числа замкнуты относительно операций сложения, вычитания и умножения. Деление, однако, остаётся невыполнимой операцией в общем случае: уравнение $3x = 2$ не имеет решения в множестве $\mathbb{Z}$.

Обобщение понятия числа, связанное с измерением величин (длины, массы, площади), приводит к рациональным числам — числам вида

$$\frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$ и обладает свойством плотности: между любыми двумя различными рациональными числами найдётся бесконечно много рациональных чисел. Всякое рациональное число представимо в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, и это представление взаимно однозначно.

Рациональные числа образуют поле: в множестве $\mathbb{Q}$ выполнимы все четыре арифметические операции (кроме деления на нуль). На протяжении значительного исторического периода рациональные числа рассматривались как исчерпывающая модель непрерывных величин. Геометрически это соответствовало представлению о том, что каждой точке числовой прямой отвечает рациональное число.

### 3. Иррациональные и действительные числа

Открытие несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, приписываемое пифагорейцам (V–VI вв. до н. э.), обнаружило существование чисел, не представимых в виде отношения двух целых чисел. Числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными; их десятичное разложение бесконечно и непериодично. Классическими примерами служат числа

$$\sqrt{2}, \quad \pi, \quad e.$$

Строгое обоснование того, что иррациональные числа бесконечно много, а их мощность превосходит мощность множества рациональных чисел, было дано в XIX веке в работах Г. Кантора (1874).

Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных чисел

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Существенной особенностью множества $\mathbb{R}$ является его непрерывность (полнота): каждой точке числовой прямой отвечает единственное действительное число и, обратно, каждое действительное число изображается единственной точкой прямой. Это свойство, выражаемое аксиомой непрерывности (например, в форме принципа вложенных отрезков Кантора или теоремы Дедекинда о сечениях), лежит в основании математического анализа. Строгие построения теории действительного числа были выполнены во второй половине XIX века Р. Дедекиндом, Г. Кантором и К. Вейерштрассом.

### 4. Приближённые вычисления

Практическая деятельность требует оперирования не точными, а приближёнными значениями величин, поскольку точное значение, как правило, недостижимо или не требуется. Теория приближённых вычислений опирается на понятия абсолютной и относительной погрешности.

Пусть $a$ — точное значение величины, $a^*$ — её приближённое значение. Абсолютной погрешностью приближения называется величина

$$\Delta = |a - a^*|,$$

а относительной погрешностью — отношение

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} \approx \frac{\Delta}{|a^*|}.$$

Основными правилами приближённых вычислений являются:

- **округление** — замена точного числа ближайшим числом с меньшим числом значащих цифр; при округлении по правилам Гаусса, если первая отбрасываемая цифра равна пяти и за ней следуют ненулевые цифры, последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу;
- **учёт верных цифр** — цифра называется верной в строгом смысле, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра;
- **оценка погрешности результата арифметических действий** — абсолютные погрешности суммы и разности складываются; относительная погрешность произведения и частного приближённо равна сумме относительных погрешностей операндов.

Значимое место в теории приближений занимают иррациональные числа: их вычисление (например, числа $\pi$ или корней алгебраических уравнений) выполняется численными методами — разложением в ряды, итерационными алгоритмами (метод Ньютона, метод бисекции). Практические вычисления всегда ведутся с конечной точностью, что требует строгого контроля накапливаемой погрешности.

**5. Комплексные числа**

Комплексные числа возникли в XVI веке в связи с задачей решения кубических уравнений: в формуле Кардано (1545) под знаком квадратного корня оказывались отрицательные выражения при вещественных корнях уравнения. Термины «мнимое число» (numerus imaginarius) введены Р. Декартом в 1637 году; систематическое изложение алгебры комплексных чисел принадлежит Л. Эйлеру, а геометрическую интерпретацию дали К. Гаусс и Ж. Арган.

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

где $i$ — мнимая единица, определяемая свойством $i^2 = -1$. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$ и образует поле, содержащее $\mathbb{R}$ в качестве подмножества. Комплексные числа изображаются точками координатной плоскости (комплексной плоскости), где ось абсцисс соответствует действительной части числа, а ось ординат — мнимой.

Помимо алгебраической формы, используется тригонометрическая

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль, $\varphi$ — аргумент числа, и показательная форма, основанная на формуле Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Основной алгебраической теоремой теории комплексных чисел является основная теорема алгебры (доказана К. Ф. Гауссом, 1799): всякое многочлен степени *n* с комплексными коэффициентами имеет ровно *n* комплексных корней с учётом кратности. Таким образом, множество С алгебраически замкнуто, и дальнейшее расширение числовой системы с сохранением свойств поля невозможно (при сохранении операций сложения и умножения и их свойств).

Комплексные числа находят приложение в электротехнике, теории колебаний, гидродинамике, квантовой механике и других областях естествознания.

**6. Статистическая обработка данных: сводка, группировка, таблицы**

Развитие понятия числа породило потребность в методах обработки числовых данных. Первичным этапом статистического исследования является статистическое наблюдение, результатом которого — упорядочение и систематизация данных.

**Статистическая сводка** представляет собой комплекс операций по обобщению первичных данных с целью получения характеристик исследуемой совокупности в целом. Различают простую сводку (подсчёт общих итогов) и групповую (распределение совокупности на группы по существенным признакам с последующим подведением итогов по каждой группе).

**Группировка** — распределение единиц совокупности на однородные группы по одному или нескольким признакам. Выделяют:

- типологическую группировку — по качественному (атрибутивному) признаку;
- структурную — по количественному признаку с целью изучения структуры совокупности;
- аналитическую — для установления взаимосвязи между факторным и результативным признаками.

ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

При количественной группировке совокупность значений признака разбивают на интервалы. Для равномерного разбиения диапазона изменения признака на k*k* интервалов используется формула Стерджеса:

$$k = 1 + 3{,}322 \lg n,$$

где $n$ — объём совокупности. Длина интервала определяется как отношение размаха варьирования к числу интервалов:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

**Статистическая таблица** — форма рационального и наглядного представления сгруппированных данных. Таблица состоит из подлежащего (объект исследования, обычно размещается в строках) и сказуемого (система показателей, характеризующих подлежащее, — в столбцах). Важнейшей формой табличного представления является вариационный ряд — последовательность вариантов, расположенных в порядке возрастания, с указанием их частот (или относительных частот). Для наглядности вариационные ряды изображаются графически в виде полигона частот, гистограммы или кумуляты.

Обобщающими (числовыми) характеристиками вариационного ряда служат средние величины — арифметическое среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

мода и медиана, а также показатели рассеяния: размах, дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

и среднее квадратичное отклонение $s = \sqrt{s^2}$.

История развития понятия числа демонстрирует последовательное расширение числовых множеств

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

каждое из которых возникало как ответ на внутренние противоречия предшествующей системы либо на потребности практики. Параллельно с теоретическим обобщением понятия числа развивались методы работы с числами: теория приближённых вычислений обеспечила практическую применимость действительных чисел, а статистические методы — систематизацию числовых данных об окружающем мире. Совокупность этих направлений составляет фундамент современной математической культуры и её приложений.