ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 2. ТЕМА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Определение производной

Пусть функция $f: D \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in D$, где $D \subseteq \mathbb{R}$. Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю, если этот предел существует и конечен:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если указанный предел существует, функция называется дифференцируемой в точке x_0. Существование производной в точке влечёт непрерывность функции в этой точке; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Геометрический смысл производной состоит в том, что $f'(x_0)$ численно равен тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ к положительному направлению оси абсцисс. Физический смысл производной — мгновенная скорость изменения величины: если $s(t)$ — закон движения точки, то $s'(t)$ — её мгновенная скорость в момент времени t.

Для практического вычисления производных применяют таблицу элементарных производных и правила дифференцирования:

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
- $(uv)' = u'v + uv'$;
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ при $v \neq 0$;
- производная сложной функции: если $y = f(u), u = g(x)$, то $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$.

Алгоритм вычисления производной по определению:

1. Записать приращение функции: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
2. Составить отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
3. Вычислить предел этого отношения при $\Delta x \to 0$.
4. Если предел существует и конечен, он является значением производной $f'(x_0)$.

Пример: для $f(x) = x^2$:

$$\Delta f = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2, \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x + \Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$.

2. Производные и дифференциалы высших порядков

Если функция f дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то её производная f' сама может быть функцией, допускающей дифференцирование. Производная от производной первого порядка называется производной второго порядка:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Аналогично определяются производные более высоких порядков:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Дифференциал первого порядка функции f в точке x определяется как $df = f'(x)\,dx$, где $dx = \Delta x$ — приращение независимой переменной. Дифференциалы высших порядков определяются рекуррентно: $d^2f = d(df)$, $d^3f = d(d^2f)$ и т. д. При этом для дифференциалов высших порядков не сохраняется свойство инвариантности формы, характерное для первого дифференциала.

Для производных высших порядков справедливы обобщённые правила:

- линейность: $(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}$;
- формула Лейбница для n-й производной произведения:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Алгоритм нахождения производной n-го порядка:

1. Найти производную первого порядка $f'(x)$.
2. Последовательно вычислять производные следующих порядков, применяя правила дифференцирования и, при необходимости, формулу Лейбница.
3. Выявить закономерность (если требуется общая формула для $f^{(n)}(x)$).
4. Проверить корректность формулы для нескольких первых значений n.

Пример: найти $f^{(4)}(x)$ для $f(x) = x^4$.

- $f'(x) = 4x^3$;
- $f''(x) = 12x^2$;
- $f'''(x) = 24x$;
- $f^{(4)}(x) = 24$.

Таким образом, четвёртая производная равна константе 24, а все последующие производные равны нулю.

3. Полное исследование функции. Построение графиков

Полное исследование функции $y = f(x)$ с целью построения её графика включает систематическую последовательность этапов, опирающихся на аппарат дифференциального исчисления.

Этапы исследования:

1. **Область определения и область значений.** Выявить множество $D(f)$, на котором функция определена. Отметить точки, где функция не определена (разрывы, вертикальные асимптоты).
2. **Чётность, нечётность, периодичность.** Проверить симметрии: $f(-x) = f(x)$ (чётная), $f(-x) = -f(x)$ (нечётная). Для периодических функций определить основной период.
3. **Точки пересечения с осями координат.** Решить $f(x) = 0$ (пересечение с осью Ox) и найти $f(0)$ (пересечение с осью Oy).
4. **Асимптоты.**
   - Вертикальные: найти точки $x = a$, где $\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$.
   - Горизонтальные: вычислить $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$. Если пределы конечны, это горизонтальные асимптоты.
   - Наклонные: если $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - kx) = b$, то $y = kx + b$ — наклонная асимптота.
5. **Монотонность и экстремумы.**
   - Найти $f'(x)$ и критические точки (где $f'(x) = 0$ или не существует).
   - Определить знаки $f'(x)$ на интервалах между критическими точками.
   - Установить интервалы возрастания ($f' > 0$) и убывания ($f' < 0$).
   - В критических точках проверить смену знака f': если знак меняется с «+» на «−», это точка локального максимума; с «−» на «+» — локального минимума.
6. **Выпуклость, вогнутость, точки перегиба.**
   - Вычислить $f''(x)$.
   - Найти точки, где $f''(x) = 0$ или не существует.
   - Определить интервалы, на которых $f'' > 0$ (график вогнут вверх) и $f'' < 0$ (вогнут вниз).
   - Точки смены знака второй производной — точки перегиба.
7. **Дополнительные точки.** При необходимости вычислить значения функции в нескольких точках для уточнения формы графика.
8. **Построение графика.** Нанести все выявленные особенности (точки, асимптоты, экстремумы, перегибы) и соединить их плавной кривой с учётом монотонности и выпуклости.

Пример полного исследования: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

1. Область определения: $x \neq 1$.
2. Функция ни чётная, ни нечётная; не периодическая.
3. Пересечения: $f(0) = 0, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
4. Асимптоты:
   - вертикальная: $x = 1$;
   - наклонная: $k = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim \dfrac{x}{x-1} = 1, b = \lim(f(x) - x) = \lim \dfrac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim \dfrac{x}{x-1} = 1$. Асимптота: $y = x + 1$.
5. Первая производная:

$$f'(x) = \frac{(2x)(x-1) - x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

   Критические точки: $x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$.
   - При $x < 0$: $f' > 0$ — возрастает.
   - $0 < x < 1$: $f' < 0$ — убывает.
   - $1 < x < 2$: $f' < 0$ — убывает.
   - $x > 2$: $f' > 0$ — возрастает.

     Точка $x = 0$ — локальный максимум, $x = 2$ — локальный минимум.

6. Вторая производная (после вычислений):

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

   Знак f'' зависит от $(x-1)^3$: при $x > 1 - f'' > 0$ (вогнутость вверх), при $x < 1 - f'' < 0$ (вогнутость вниз). Точка перегиба отсутствует, так как $x = 1$ не входит в область определения.
7. Дополнительные точки: например, $f(3) = 4{,}5, f(-1) = -0{,}5$.
8. График строится с учётом всех указанных особенностей.