ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 2. ТЕМА 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Случайные события. Классическое определение вероятности

Случайным событием A в рамках заданного случайного эксперимента называется наблюдаемый исход, который в результате опыта может произойти либо не произойти. Множество всех возможных элементарных исходов эксперимента образует пространство элементарных исходов Ω. Каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$ приписывается вероятность $P(\omega_i)$, причём $\sum_i P(\omega_i) = 1$.

В случае конечного пространства Ω, состоящего из n равновозможных элементарных исходов, применяется классическое определение вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число исходов, благоприятствующих событию A, n — общее число равновозможных исходов.

Алгоритм вычисления вероятности по классическому определению:

1. Формализовать эксперимент: чётко определить, что считается элементарным исходом.
2. Убедиться в равновозможности исходов (отсутствие систематических смещений).
3. Подсчитать общее число исходов n.
4. Подсчитать число исходов m, при которых событие A наступает.
5. Вычислить $P(A) = m/n$ и при необходимости упростить дробь или представить в виде десятичного числа.

2. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу попарно несовместных гипотез, то есть:

- $H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$,
- $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$,
- $P(H_i) > 0$ для всех i.

Тогда для любого события A, вероятность которого интересует, справедлива **формула полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i),$$

где $P(A|H_i)$ — условная вероятность события A при условии, что гипотеза H_i верна.

На базе этой формулы строится **формула Байеса**, позволяющая пересчитывать вероятности гипотез после наблюдения события A:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}.$$

Алгоритм применения формулы Байеса:

1. Определить набор гипотез $H_1, \ldots, H_n$, покрывающих все возможные причины наблюдаемого события.
2. Задать априорные вероятности $P(H_i)$.
3. Определить условные вероятности $P(A|H_i)$ на основе модели или данных.
4. Вычислить полную вероятность $P(A)$ по формуле полной вероятности.
5. Для каждой гипотезы H_k вычислить апостериорную вероятность $P(H_k|A)$.
6. Проанализировать, какие гипотезы стали более вероятными после учёта данных.

В IT-практике формула Байеса применяется в байесовских классификаторах, фильтрации спама, оценке надёжности систем и в задачах принятия решений при неопределённости.

3. Вычисление вероятностей сложных событий

Сложные события строятся из простых с помощью операций объединения, пересечения и дополнения. Основные правила:

- **Сложение вероятностей для несовместных событий:** если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- **Общая формула сложения:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **Умножение вероятностей:** если события A и B независимы, то $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; в общем случае $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.
- **Дополнение:** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Для последовательного анализа цепочек событий удобно использовать дерево вероятностей, где ветви соответствуют условным вероятностям.

Алгоритм расчёта вероятности сложного события:

1. Разложить сложное событие на комбинации простых событий с помощью логических операций.
2. Определить, являются ли события независимыми или зависимыми; при необходимости ввести условные вероятности.
3. Применить соответствующие правила (сложение, умножение, дополнение).
4. При наличии нескольких сценариев использовать формулу полной вероятности.
5. Проверить, что итоговая вероятность лежит в интервале $[0, 1]$, и при необходимости провести перекрёстную проверку альтернативным методом.

4. Схемы Бернулли. Формула Бернулли

Схема Бернулли описывает последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых событие A (успех) наступает с постоянной вероятностью p, а его ненаступление (неудача) — с вероятностью $q = 1 - p$.

Пусть X — случайная величина, равная числу успехов в n испытаниях. Тогда вероятность того, что произойдёт ровно k успехов, задаётся **формулой Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k.

Условия применимости схемы Бернулли:

- Независимость испытаний.
- Постоянство вероятности успеха p в каждом испытании.
- Двоичность исхода: успех/неудача.

5. Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли

Помимо вероятности ровно k успехов, на практике часто требуются:

- Вероятность не менее k успехов: $P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i p^i q^{n-i}$.
- Вероятность не более k успехов: $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i q^{n-i}$.
- Наиболее вероятное число успехов k_0 определяется из неравенства:

$$(n+1)p - 1 \leq k_0 \leq (n+1)p.$$

При больших n прямое вычисление биномиальных вероятностей становится трудоёмким. В таких случаях применяют приближения:

- **Формула Пуассона** при $n \to \infty, p \to 0, np \to \lambda$: $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.
- **Локальная теорема Муавра–Лапласа** при умеренных p: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.
- **Интегральная теорема Муавра–Лапласа** для диапазонов: $P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Алгоритм решения задач в схеме Бернулли:

1. Убедиться, что условия схемы Бернулли выполняются (независимость, постоянная p, двоичные исходы).
2. Записать параметры: $n, p, q = 1 - p$.
3. Определить требуемую вероятность (ровно k, не менее k, диапазон и т. п.).
4. Выбрать метод: точная формула Бернулли либо приближённый метод (Пуассон, Муавр–Лаплас).
5. Выполнить вычисления, при необходимости используя таблицы или программные средства.
6. Проверить разумность результата (вероятность в $[0, 1]$, соответствие интуиции).