ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 19. ТЕМА 18. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

Прямоугольная система координат в пространстве

Рассмотрим три попарно перпендикулярные прямые, проходящие через одну точку O, — оси абсцисс, ординат и аппликат (Ox, Oy, Oz), на каждой из которых выбран единичный масштаб. Такая конфигурация образует **прямоугольную декартову систему координат** в трёхмерном евклидовом пространстве. Каждой точке M пространства ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел — координат $(x; y; z)$, где числа равны проекциям точки на соответствующие оси.

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле, непосредственно следующей из теоремы Пифагора:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координаты середины отрезка AB находятся как полусуммы соответствующих координат его концов:

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Уравнение сферы с центром $C(a; b; c)$ и радиусом R имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

В общем случае уравнение второй степени

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

при условии $A = B = C \neq 0$, $D = E = F = 0$ задаёт сферу; поверхность второго порядка, являющуюся сферой, не всегда можно сразу распознать по уравнению, однако любая сфера описывается уравнением указанного вида после выделения полных квадратов.

Уравнение плоскости в прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где вектор $\vec{n}(A; B; C)$ называется **вектором нормали** — он перпендикулярен плоскости.

ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

Векторы и их свойства

Вектором называется направленный отрезок. Вектор характеризуется длиной (модулем) и направлением. Модуль вектора $\vec{a}(x; y; z)$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Вектор с началом в точке $A(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке $B(x_2; y_2; z_2)$ имеет координаты

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

Равенство векторов. Векторы называются равными, если равны их модули и совпадают направления (сонаправлены). В координатной форме равенство векторов означает равенство соответствующих координат. Нулевой вектор $\vec{0}$ имеет нулевую длину и направление считается неопределённым.

Сложение векторов. Сумма векторов определяется правилом треугольника, правилом параллелограмма и правилом многоугольника. В координатной записи:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2).$$

Сложение векторов коммутативно ($\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$) и ассоциативно $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Умножение вектора на число. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ и противоположно ему при $\lambda < 0$. В координатах:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x;\ \lambda y;\ \lambda z).$$

Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на параллельных прямых (или на одной прямой). Коллинеарность векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ означает существование такого числа λ, что $x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1, z_2 = \lambda z_1$.

Разложение вектора по направлениям

Если векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ некомпланарны, то любой вектор $\vec{a}$ пространства единственным образом представим в виде

$$\vec{a} = x\,\vec{p} + y\,\vec{q} + z\,\vec{r},$$

где x, y, z — числа, называемые координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{p}; \vec{q}; \vec{r})$. Особую роль играет ортонормированный базис из единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, сонаправленных осям Ox, Oy, Oz:

$$\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

Угол между векторами. Проекция вектора на ось

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол $\varphi \in [0; \pi]$ между равными им векторами с общим началом. Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ — косинусы углов α, β, γ с осями координат — удовлетворяют тождеству

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число

$$\mathrm{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi,$$

где φ — угол между вектором и осью. Проекция обладает свойствами линейности: $\mathrm{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{пр}_l\vec{a} + \mathrm{пр}_l\vec{b}$ и $\mathrm{пр}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\mathrm{пр}_l\vec{a}$.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.$$

Справедливы эквивалентные представления:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\mathrm{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\mathrm{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

В координатной форме для $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Отсюда следует формула для угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Основные свойства скалярного произведения: коммутативность $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; дистрибутивность $\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$; сочетательность относительно числового множителя $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Скалярный квадрат равен квадрату модуля: $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$. Условие перпендикулярности ненулевых векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Применение координат и векторов при решении задач

Метод координат и векторный метод позволяют свести геометрические задачи к алгебраическим вычислениям.

Нахождение расстояний. Расстояние от точки до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Расстояние от точки P до прямой, заданной точкой M и направляющим вектором $\vec{s}$, определяется как высота в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{MP}$ и $\vec{s}$, и вычисляется через векторное произведение:

$$d = \frac{|\vec{MP} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

Нахождение углов. Угол между плоскостями равен углу между их нормалями; угол между прямой и плоскостью связан с углом между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости соотношением $\sin\theta = |\cos\varphi|$, где φ — угол между направляющим вектором и нормалью.

Прикладные задачи. Скалярное произведение служит математической моделью работы постоянной силы: если тело перемещается под действием силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $\vec{s}$, то работа равна $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\varphi$. Физические величины, имеющие направление и аддитивно складывающиеся (скорость, сила, напряжённость поля), описываются векторами; их равнодействующая находится суммированием компонент.

Контрольные соотношения

Сведём ключевые формулы в таблицу.

Объект	Формула
Длина отрезка AB	$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$
Модуль вектора	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Скалярное произведение	$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$
Косинус угла	$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{
Проекция на ось	$\|\vec{a}\| \cos\varphi$
Уравнение сферы	$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
Уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0$
Расстояние до плоскости	$\dfrac{

Изложенный аппарат образует единую вычислительную схему: любая метрическая или угловая задача в пространстве формулируется через координаты точек и векторов и решается стандартными алгебраическими операциями — сложением, умножением на число и скалярным умножением.