ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 18. ТЕМА 17. ИЗМЕРЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ

1. Понятие объёма и его измерение

Одной из фундаментальных задач геометрии, наряду с измерением длин и площад ей, является измерение объёмов. **Объём** — количественная характеристика части прост ранства, занимаемой геометрическим телом. Объём есть неотрицательная величина, обл адающая следующими свойствами:

1. Равные тела имеют равные объёмы.
2. Если тело разбито на части, не имеющие общих внутренних точек, то объё м тела равен сумме объёмов этих частей (аддитивность).
3. Объём куба, ребро которого равно единице длины, принимается равным ед инице (единица измерения).

Из этих аксиоматических свойств вытекает, что объём измеряется числом единичн ых кубов, укладывающихся в данном теле. Для тела, разбитого на конечное число прямо угольных параллелепипедов, объём вычисляется непосредственно; для тел с криволиней ными границами требуются более общие методы — предельный переход, приводящий к понятию интеграла. Строгое изложение теории объёмов опирается на теорию меры Жо рдана (в элементарной геометрии) и меру Лебега (в современном анализе).

2. Интегральная формула объёма

Основным аналитическим инструментом вычисления объёмов служит следующая теорема.

Теорема. Если для тела T существует функция $S(x)$, равная площади сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку x, причём $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то объём тела выражается формулой:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Идея доказательства основана на представлении объёма как предела суммы объёмов тонких цилиндрических слоёв толщины Δx: интегральная сумма $\sum S(\xi_k)\Delta x_k$ при измельчении разбиения стремится к объёму тела. Формула является обобщением принципа Кавальери: два тела, у которых равны площади сечений, проведённых на одинаковых высотах, имеют равные объёмы.

Отметим частные случаи интегральной формулы:

- тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox (метод.disc которого сводится к формуле):

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx;$$

- тело вращения вокруг оси, не пересекающей фигуру (метод цилиндрических слоёв, формула Гульдина):

$$V = 2\pi \int_a^b x\,|f(x)|\,dx.$$

3. Объёмы куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра

Куб с ребром a:

$$V = a^3.$$

Прямоугольный параллелепипед с рёбрами a, b, c:

$$V = abc.$$

Призма. Объём любой призмы равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Доказательство для прямой призмы следует непосредственно из определения объёма (укладывание единичных кубов), для наклонной — из принципа Кавальери: наклонная призма равновелика прямой призме с тем же основанием и высотой.

Цилиндр. Поскольку цилиндр является частным случаем призмы с основанием произвольной формы (в предельном смысле), его объём задаётся той же формулой:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h,$$

где r — радиус основания, h — высота кругового цилиндра.

4. Объёмы пирамиды и конуса

Теорема. Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Доказательство опирается на лемму о равновеликости треугольных пирамид с равными основаниями и равными высотами (следствие принципа Кавальери) и на разбиение треугольной призмы на три равновеликие пирамиды. Для n-угольной пирамиды результат получается разбиением основания на треугольники.

Конус. По аналогии, объём конуса (в том числе усечённого) вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Строгое доказательство для кругового конуса проводится методом исчерпывания либо с помощью интегральной формулы: площадь сечения конуса плоскостью на высоте x равна $S(x) = \pi r^2 \left(\frac{x}{h}\right)^2$, откуда

$$V = \int_0^h \pi r^2 \frac{x^2}{h^2}\, dx = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Для усечённого конуса с радиусами оснований r_1 и r_2:

$$V = \frac{1}{3} \pi h \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right).$$

5. Площади поверхностей цилиндра и конуса

Цилиндр. Боковая поверхность прямого кругового цилиндра при развёртке на плоскость превращается в прямоугольник со сторонами $2\pi r$ и h, поэтому:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h, \qquad S_{\text{полн}} = 2\pi r(h + r).$$

Конус. Боковая поверхность кругового конуса разворачивается в круговой сектор радиуса l (образующей) с дугой длиной $2\pi r$, откуда:

$$S_{\text{бок}} = \pi r l, \qquad S_{\text{полн}} = \pi r(l + r).$$

Для усечённого конуса с радиусами r_1, r_2 и образующей l:

$$S_{\text{бок}} = \pi(r_1 + r_2)l.$$

Строгое обоснование площадей кривых поверхностей опирается на понятие площади описанной многогранной поверхности и предельного перехода (аналогично определению длины кривой через вписанные ломаные).

6. Объём шара и площадь сферы

Теорема. Объём шара радиуса R вычисляется по формуле:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Классическое доказательство (метод исчерпывания Архимеда, изложенное им в трактате «О шаре и цилиндре») состоит в сравнении шара с телом, полученным вырезанием конуса из цилиндра: по принципу Кавальери шар равновелик разности цилиндра и двойного конуса. Аналитически результат следует из интегральной формулы: площадь сечения шара плоскостью на расстоянии x от центра равна $\pi(R^2 - x^2)$, и

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Площадь сферы радиуса R определяется предельным переходом через площади описанных около сферы многогранных поверхностей:

$$S = 4\pi R^2.$$

Заметим, что $4\pi R^2$ равно площади боковой поверхности цилиндра, описанного вокруг шара, — результат, также открытый Архимедом. Полезны также формулы для частей шара:

- объём шарового сегмента высотой h: $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$;
- объём шарового сектора: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$;
- площадь сферического сегмента (шарового пояса) высотой h: $S = 2\pi R h$.

7. Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объёмов

Два тела называются **подобными**, если одно может быть получено из другого преобразованием подобия — композицией гомотетии с коэффициентом $k > 0$ и движения. При преобразовании подобия с коэффициентом k все линейные размеры тела (рёбра, диагонали, радиусы, высоты, образующие) умножаются на k, а углы сохраняются.

Теорема. Если два тела подобны с коэффициентом k, то:

- отношение площадей их поверхностей (в том числе площадей любых соответствующих сечений) равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2;$$

- отношение их объёмов равно кубу коэффициента подобия:

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3.$$

Доказательство опирается на свойства преобразования подобия: каждая плоская фигура отображается на подобную фигуру с коэффициентом k, поэтому все площади умножаются на k^2; далее интегральная формула объёма (либо разбиение тел на элементарные части) даёт умножение объёмов на k^3.

Отсюда вытекает общее правило: при подобном изменении тела с коэффициентом k

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}.$$

Это соотношение, известное как закон подобия (изометрического скейлинга), имеет фундаментальное значение: например, при увеличении линейных размеров тела вдвое его площадь поверхности увеличивается вчетверо, а объём — в восемь раз. Именно этим объясняется, почему с ростом размеров объекта отношение площади поверхности к объёму уменьшается — факт, широко используемый в биологии, теплотехнике и инженерии.