ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 17. ТЕМА 16. ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

1. Общие понятия

Тело вращения — геометрическое тело, полученное вращением плоской фигуры в округ оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей её внутреннюю област ь. К числу классических тел вращения относятся цилиндр, конус, усечённый конус и ша р. Теория этих тел восходит к античной математике: фундаментальные результаты о объ ёмах и поверхностях цилиндра, конуса и шара были получены Архимедом в III в. до н. э . и изложены в трактате «О шаре и цилиндре».

2. Цилиндр

2.1. Определение и основные элементы

Прямым круговым цилиндром называется тело, полученное вращением прямоугол ьника вокруг одной из его сторон. При этом вращающаяся сторона, перпендикулярная о си, описывает круг (основание цилиндра), а противоположная ей — такой же круг. Стор она, параллельная оси вращения, описывает боковую (цилиндрическую) поверхность.

Основные элементы цилиндра:

- **основания** — два равных круга, лежащие в параллельных плоскостях;
- **ось цилиндра** — прямая, проходящая через центры оснований;
- **высота** h — расстояние между плоскостями оснований; в прямом цилиндре высот а равна образующей;
- **радиус** r — радиус основания;
- **образующая** — отрезок, соединяющий соответствующие точки окружностей осно ваний и параллельный оси; все образующие цилиндра равны и параллельны.

2.2. Площади и объём

Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади прямоугольника, одна сторона которого равна образующей $l = h$, а другая — длине окружности основания $2\pi r$:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h, \qquad S_{\text{полн}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h).$$

Объём цилиндра:

$$V = \pi r^2 h.$$

2.3. Развёртка

Развёртка боковой поверхности цилиндра — прямоугольник со сторонами $2\pi r$ (длина окружности основания) и h (высота). Полная развёртка состоит из этого прямоугольника и двух кругов радиуса r. Развёртка есть доказательство формулы боковой поверхности: при разрезании цилиндрической поверхности по образующей и расправлении она без растяжений преобразуется в плоскость.

2.4. Сечения цилиндра

Осевое сечение — сечение плоскостью, проходящей через ось цилиндра. Осевое сечение прямого кругового цилиндра — прямоугольник со сторонами $2r$ и h. Если осевое сечение является квадратом ($h = 2r$), цилиндр называется равносторонним.

Сечения, параллельные основанию, — круги, равные основанию. Соответствующие сечения конгруэнтны.

Сечение цилиндра плоскостью, не параллельной основанию и не пересекающей основания, — эллипс; это сечение относится к классу конических сечений.

3. Конус

3.1. Определение и основные элементы

Прямым круговым конусом называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. Неподвижный катет служит осью конуса, гипотенуза при вращении описывает боковую (коническую) поверхность.

Основные элементы конуса:

- **основание** — круг радиуса r;
- **вершина** — точка, неподвижная при вращении;
- **высота** h — перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания;
- **образующая** l — отрезок, соединяющий вершину с точкой окружности основания; все образующие конуса равны и образуют с осью постоянный угол (угол при вершине осевого сечения постоянен);
- **осевой угол** — угол между двумя образующими в осевом сечении.

Образующая, высота и радиус основания связаны соотношением:

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

3.2. Площади и объём

Площадь боковой поверхности конуса равна площади сектора радиуса l с дугой $2\pi r$:

$$S_{\text{бок}} = \pi r l, \qquad S_{\text{полн}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(r + l).$$

Объём конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Формула объёма следует из общей формулы объёма пирамидального тела ($V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$) либо интегрированием: площадь сечения конуса плоскостью на высоте x от вершины равна $\pi \left(\frac{r}{h} x\right)^2$, откуда

$$V = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 \, dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

3.3. Развёртка

Развёртка боковой поверхности конуса — круговой сектор радиуса, равного образующей l. Центральный угол φ этого сектора определяется из условия равенства длины дуги сектора длине окружности основания:

$$\varphi = \frac{2\pi r}{l} \quad \text{или, в градусной мере,} \quad \varphi = 360^\circ \cdot \frac{r}{l}.$$

Полная развёртка конуса состоит из сектора и круга основания.

3.4. Сечения конуса

Осевое сечение конуса, проходящее через вершину, — равнобедренный треугольник с боковыми сторонами l и основанием $2r$. В частном случае, когда $l = 2r$, осевое сечение — равносторонний треугольник; такой конус называют равносторонним.

Сечения, параллельные основанию, — круги с центром на оси конуса. Все сечения, параллельные основанию, подобны основанию; радиус сечения, проведённого на расстоянии x от вершины, равен $\frac{r}{h} x$.

Сечения конуса плоскостями, не проходящими через вершину, дают конические сечения: окружность, эллипс, параболу и гиперболу — в зависимости от угла наклона секущей плоскости к оси конуса. Это свойство было известно ещё Аполлонию Пергскому (III–II вв. до н. э.) и изложено в его трактате «Конические сечения».

4. Усечённый конус

4.1. Определение

Усечённым конусом (коническим слоем) называется часть конуса, заключённая между основанием и плоскостью, параллельной основанию. Усечённый конус может быть получен также вращением прямоугольной трапеции вокруг её боковой стороны, перпендикулярной основаниям трапеции.

Основные элементы: два основания — круги радиусов r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$), высота h, образующая l, причём

$$l = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}.$$

4.2. Площади и объём

Площадь боковой поверхности усечённого конуса равна разности боковых поверхностей полного конуса и его «верхней» части:

$$S_{\text{бок}} = \pi(r_1 + r_2)l.$$

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн}} = \pi(r_1^2 + r_2^2) + \pi(r_1 + r_2)l.$$

Объём усечённого конуса получается как разность объёмов двух подобных конусов:

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right).$$

4.3. Развёртка и сечения

Развёртка боковой поверхности усечённого конуса — часть кругового кольца (разность двух концентрических секторов) с внешним радиусом R_1 и внутренним радиусом R_2, где $\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1}$, причём $R_1 - R_2 = l$, а центральный угол тот же, что у развёртки полного конуса.

Осевое сечение усечённого конуса — равнобедренная трапеция с основаниями $2r_1$ и $2r_2$ и боковой стороной l. Сечения, параллельные основаниям, — круги.

5. Шар и сфера

5.1. Определения

Сферой называется множество точек пространства, удалённых от данной точки O (центра сферы) на данное расстояние R (радиус сферы). Уравнение сферы с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Шаром называется множество всех точек пространства, удалённых от центра на расстояние, не превосходящее R; таким образом, сфера — граница шара.

Шар может быть получен вращением полукруга (или круга) вокруг его диаметра.

5.2. Сечения шара и сферы

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Радиус r сечения, отстоящего от центра шара на расстояние d, определяется по теореме Пифагора:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Из этой формулы следует:

- наибольшее сечение получается при $d = 0$: плоскость, проходящая через центр шара, — **большой круг** радиуса R;
- сечения, равноудалённые от центра, конгруэнтны;
- из двух сечений, не равноудалённых от центра, больше то, которое ближе к центру.

Сечение сферы плоскостью есть окружность. Плоскости, проходящие через центр, дают большие круги; все остальные — малые круги. Большие круги играют на сфере роль «прямых»: кратчайшие пути (геодезические) на сфере — дуги больших кругов, что лежит в основе сферической геометрии и навигации.

Площадь сферы и объём шара:

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2, \qquad V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Знаменитый результат Архимеда: объём шара равен двум третьим объёма описанного около него цилиндра, а площадь сферы равна площади боковой поверхности этого цилиндра; в честь этого открытия на могиле Архимеда был изображён шар, вписанный в цилиндр.

5.3. Части шара и сферы

Плоскость, пересекающая шар, делит его на две **шаровые сегменты**; часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями, — **шаровой слой**. Часть сферы, отсекаемая плоскостью, — **сферический сегмент (шапочка)**; часть сферы между двумя параллельными плоскостями — **сферический пояс**. Конус с вершиной в центре шара высекает из него **шаровой сектор**; его объём $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$, где H — высота соответствующего сегмента.

6. Касательная плоскость к сфере

6.1. Определение и свойство

Касательной плоскостью к сфере называется плоскость, имеющая со сферой ровно одну общую точку — точку касания.

Теорема. Плоскость является касательной к сфере тогда и только тогда, когда радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен этой плоскости.

Доказательство опирается на расстояние от центра сферы до плоскости. Если плоскость проходит через точку A сферы и перпендикулярна радиусу OA, то расстояние от центра O до плоскости равно R, а тогда по формуле $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ радиус любого сечения равен нулю — плоскость и сфера имеют единственную общую точку. Обратно, если плоскость касается сферы в точке A, то расстояние d от центра до плоскости равно R, а кратчайшим расстоянием от точки O до плоскости является перпендикуляр, следовательно, OA перпендикулярен плоскости.

Следствие. Через любую точку сферы проходит ровно одна касательная плоскость. Прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания, называется касательной прямой к сфере; таких прямых бесконечно много, и все они перпендикулярны радиусу, проведённому в точку касания.

6.2. Вписанные и описанные тела

Многогранник называется **вписанным в шар**, если все его вершины лежат на сфере; **описанным около шара** — если все его грани касаются сферы. Для правильной пирамиды центр вписанного и описанного шаров лежит на её оси (высоте); для прямой призмы вписанная сфера существует тогда и только тогда, когда в её основание можно вписать окружность, центр которой лежит на высоте призмы.