ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

# ЛЕКЦИЯ 16. ТЕМА 15. МНОГОГРАННИКИ

**1. Основные понятия**

Многогранником называется тело (геометрическая фигура в пространстве), поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. Указанные многоугольники называются **гранями** многогранника, стороны этих многоугольников — **рёбрами**, а их вершины — **вершинами** многогранника. Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются его **диагоналями**.

Многогранник является пространственным аналогом многоугольника на плоскости: если многоугольник задаёт часть плоскости, то многогранник ограничивает часть пространства. При этом рёбра многогранника — это отрезки, а грани — части плоскостей (многоугольники), из которых составлена его поверхность.

**2. Многогранные углы**

Понятие многогранного угла является пространственным обобщением плоского угла. **Многогранным углом** называется фигура, состоящая из точки и различных лучей, исходящих из этой точки и не лежащих в одной плоскости, а также частей плоскостей, ограниченных этими лучами. Общая точка лучей называется вершиной угла, сами лучи — его рёбрами, а части плоскостей, ограниченные соседними рёбрами, — гранями (гранными углами) многогранного угла. Каждый гранный угол многогранного угла меньше суммы остальных его гранных углов.

Наиболее простым случаем является **трёхгранный угол** — многогранный угол с тремя гранями. Трёхгранный угол обозначается указанием его вершины и трёх точек на рёбрах (например, OABC*OABC*). Если все плоские углы трёхгранного угла прямые, то такой угол называется прямым трёхгранным углом. Многогранные углы измеряются суммой образующих их плоских углов.

**3. Выпуклые многогранники**

Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани (иначе — если он является выпуклой фигурой, то есть вместе с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок). Примером невыпуклого многогранника может служить многогранник, у которого одна грань «вдавлена» внутрь тела.

Для выпуклого многогранника справедлив ряд фундаментальных свойств:

- все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками;
- сумма плоских углов при любой его вершине меньше 360∘360∘;
- выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

## 4. Теорема Эйлера

Одним из важнейших результатов теории выпуклых многогранников является **теорема Эйлера** (1752 г.): для любого выпуклого многогранника число вершин В, число рёбер Р и число граней Г связаны соотношением

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2.$$

Величина $\text{В} - \text{Р} + \text{Г}$ называется эйлеровой характеристикой многогранника. Теорема Эйлера выражает глубокое свойство выпуклых многогранников, не зависящее от их формы и размеров. Её справедливость легко проверить на примерах: для куба $\text{В} = 8$, $\text{Р} = 12$, $\text{Г} = 6$, и действительно $8 - 12 + 6 = 2$; для тетраэдра $\text{В} = 4$, $\text{Р} = 6$, $\text{Г} = 4$, и $4 - 6 + 4 = 2$.

## 5. Призма

**Призмой** называется многогранник, две грани которого (основания) — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани (боковые) — параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами основания. Отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований, называются боковыми рёбрами призмы; все боковые рёбра призмы параллельны и равны. Призма называется $n$-угольной, если её основания — $n$-угольники.

**Высотой призмы** называется расстояние между плоскостями её оснований (перпендикуляр, проведённый из точки одной плоскости к другой).

Призма называется **прямой**, если её боковые рёбра перпендикулярны плоскостям оснований, и **наклонной** — если её боковые рёбра не перпендикулярны плоскостям оснований. У прямой призмы боковые грани — прямоугольники, а высота совпадает с боковым ребром.

Прямая призма называется **правильной**, если её основания — правильные многоугольники. У правильной призмы все боковые грани — равные прямоугольники.

Основные формулы для призмы. Пусть $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $h$ — высота, $P$ — периметр перпендикулярного сечения, $l$ — длина бокового ребра. Тогда:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h, \qquad S_{\text{бок}} = P_{\perp} \cdot l,$$

где $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения. Для прямой призмы $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h$, где $P_{\text{осн}}$ — периметр основания.

### Параллелепипед

**Параллелепипедом** называется призма, основания которой — параллелограммы. Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам; эта точка является его центром симметрии. Параллелепипед называется прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны основаниям, и прямоугольным, если он прямой и его основания — прямоугольники. В прямоугольном параллелепипеде все грани — прямоугольники, а квадрат диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

где $a$, $b$, $c$ — рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины. Объём параллелепипеда вычисляется по формуле $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, а для прямоугольного — $V = abc$.

### Куб

**Кубом** (правильным гексаэдром) называется прямоугольный параллелепипед, все рёбра которого равны. Все грани куба — равные квадраты. Куб обладает высшей степенью симметрии среди параллелепипедов. Для куба с ребром $a$:

$$V = a^3, \qquad S_{\text{полн}} = 6a^2, \qquad d = a\sqrt{3}.$$

## 6. Пирамида

**Пирамидой** называется многогранник, состоящий из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости этого многоугольника (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания. Треугольники, образованные вершиной и сторонами основания, называются боковыми гранями, а отрезки, соединяющие вершину с вершинами основания, — боковыми рёбрами. Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из её вершины на плоскость основания. Пирамида называется $n$ -угольной по числу углов её основания.

Пирамида называется **правильной**, если её основание — правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника. У правильной пирамиды все боковые рёбра равны, все боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется **апофемой**. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l,$$

где $l$ — апофема. Объём любой пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$$

### Усечённая пирамида

Плоскость, параллельная основанию пирамиды и пересекающая её, отсекает подобную пирамиду; оставшаяся часть называется **усечённой пирамидой**. Многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями усечённой пирамиды, а трапеции, соединяющие их, — боковыми гранями. Усечённая пирамида, полученная из правильной, называется правильной; её боковые грани — равные равнобедренные трапеции, а отрезок, соединяющий центры оснований, является её высотой.

Объём усечённой пирамиды с площадями оснований $S_1$ и $S_2$ и высотой $h$ вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3} h \left( S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2 \right).$$

### Тетраэдр

Пирамида, основанием которой является треугольник, называется треугольной пирамидой, или **тетраэдром**. Тетраэдр имеет 4 грани, 6 рёбер и 4 вершины. Если все его грани — правильные треугольники, тетраэдр называется правильным и является одним из пяти правильных многогранников.

## 7. Симметрия многогранников

Точки $A$ и $A_1$ пространства называются симметричными относительно точки $O$ (центра симметрии), если $O$ — середина отрезка $AA_1$. Фигура обладает **центральной симметрией**, если каждой её точке соответствует симметричная ей точка, также принадлежащая фигуре. Аналогично определяются симметрия относительно прямой (осевая симметрия) и симметрия относительно плоскости.

**Симметрия куба.** Куб имеет центр симметрии — точку пересечения его диагоналей; осей симметрии — 9 (три оси проходят через центры противоположных граней, шесть — через середины параллельных, но не лежащих на одной грани рёбер); плоскостей симметрии — 9 (три плоскости проходят через середины параллельных рёбер, шесть — через диагонали противоположных граней). Куб обладает также вращательной симметрией: поворот вокруг оси, проходящей через центры противоположных граней, на углы $90^\circ$, $180^\circ$ и $270^\circ$ переводит куб в себя.

**Симметрия прямоугольного параллелепипеда.** Прямоугольный параллелепипед имеет центр симметрии — точку пересечения диагоналей, три оси симметрии (прямые, проходящие через центры противоположных граней) и три плоскости симметрии (плоскости, проходящие через середины четырёх параллельных рёбер).

**Симметрия прямой призмы.** Прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник (правильная призма), обладает осью симметрии — прямой, соединяющей центры оснований, а также плоскостями симметрии. Правильная призма имеет $n$ плоскостей симметрии, проходящих через ось и вершины либо середины сторон основания.

**Симметрия правильной пирамиды.** Правильная пирамида обладает осью симметрии — прямой, проходящей через её вершину и центр основания, а также $n$ плоскостями симметрии, каждая из которых проходит через ось и либо вершину, либо середину стороны основания. Правильный тетраэдр имеет 3 оси и 6 плоскостей симметрии.

## 8. Сечения многогранников

**Сечением** многогранника плоскостью называется многоугольник, сторонами которого являются отрезки, по которым эта плоскость пересекает грани многогранника. Плоскость, пересекающая многогранник более чем в двух точках, задаёт единственное сечение. При построении сечений используются следующие аксиомы и теоремы стереометрии:

- если две точки прямой принадлежат плоскости сечения, то и вся прямая принадлежит этой плоскости;
- если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны;
- если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает её, то линия пересечения параллельна данной прямой.

**Сечения куба.** Сечением куба плоскостью может быть треугольник, четырёхугольник, пятиугольник или шестиугольник (но не более шестиугольника, так как куб имеет 6 граней). Так, плоскость, проходящая через три вершины куба, не принадлежащие одной грани, даёт сечение — правильный треугольник. Диагональное сечение куба, проходящее через два параллельных ребра и две диагонали граней, представляет собой прямоугольник.

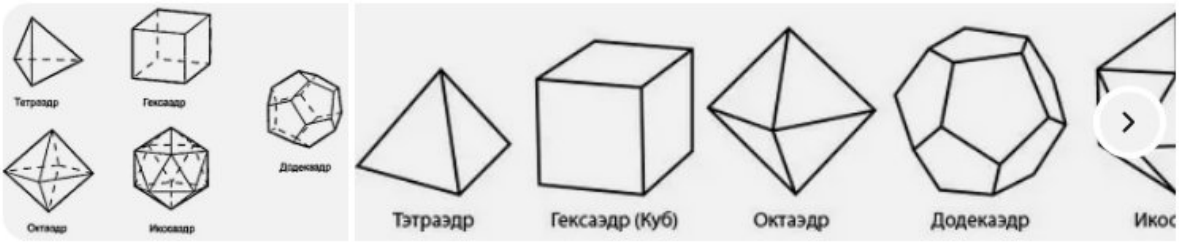
**Сечения призмы.** Боковая поверхность призмы пересекается плоскостью, параллельной боковым рёбрам, по параллельным отрезкам. Диагональное сечение призмы — сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, — является параллелограммом; у прямой призмы — прямоугольником. Перпендикулярным сечением называется сечение плоскостью, перпендикулярной боковым рёбрам; периметр перпендикулярного сечения используется при вычислении боковой поверхности призмы.

**Сечения пирамиды.** Всякое сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, является многоугольником, подобным основанию, причём коэффициент подобия равен отношению расстояния от вершины до секущей плоскости к высоте пирамиды. Диагональным сечением пирамиды называется сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани; такое сечение является треугольником. Построение произвольных сечений пирамиды выполняется методом следов или методом вспомогательных сечений.

## 9. Правильные многогранники

**Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани — равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число рёбер.**

Существует только пять правильных выпуклых многогранников (это доказано ещё в древности; доказательство содержится в «Началах» Евклида и связано с именами пифагорейцев и Платона):




1. **Правильный тетраэдр** — гранями являются четыре правильных треугольника; в каждой вершине сходятся 3 ребра. Он имеет $\mathrm{В} = 4, \mathrm{Р} = 6, \mathrm{Г} = 4$.
2. **Куб (правильный гексаэдр)** — гранями являются шесть квадратов; в каждой вершине сходятся 3 ребра. Он имеет $\mathrm{В} = 8, \mathrm{Р} = 12, \mathrm{Г} = 6$.
3. **Октаэдр** — гранями являются восемь правильных треугольников; в каждой вершине сходятся 4 ребра. Он имеет $\mathrm{В} = 6, \mathrm{Р} = 12, \mathrm{Г} = 8$. Октаэдр можно получить, соединив центры граней куба, и обратно: центры граней октаэдра являются вершинами куба.
4. **Додекаэдр** — гранями являются двенадцать правильных пятиугольников; в каждой вершине сходятся 3 ребра. Он имеет $\mathrm{В} = 20, \mathrm{Р} = 30, \mathrm{Г} = 12$.
5. **Икосаэдр** — гранями являются двадцать правильных треугольников; в каждой вершине сходятся 5 рёбер. Он имеет $\mathrm{В} = 12, \mathrm{Р} = 30, \mathrm{Г} = 20$.

То, что других правильных выпуклых многогранников не существует, следует из теоремы Эйлера и ограничений на углы при вершине: сумма плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360◦, поэтому в вершине могут сходиться либо три, четыре или пять правильных треугольников, либо три квадрата, либо три правильных пятиугольника — других возможностей нет. Правильным многогранникам с древности приписывалось символическое значение; их изучение связано с именами Платона, Теэтета, Евклида, Кеплера и других учёных.