ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 15. ТЕМА 14. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Стереометрия изучает свойства фигур в трёхмерном пространстве. Её основными неопределяемыми понятиями служат точка, прямая и плоскость, а связи между ними устанавливаются системой аксиом. Исторически систематическое изложение этого материала восходит к «Началам» Евклида (III век до н. э.); в современном виде аксиоматика стереометрии опирается на аксиоматику Гильберта (1899 г.). В настоящей лекции рассматриваются основные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей, метрические характеристики (углы, расстояния) и основы теории изображения пространственных фигур на плоскости.

Обозначения: точки — прописными латинскими буквами (A, B, ...), прямые — строчными (a, b, ...) или двумя точками (AB), плоскости — греческими буквами (α, β, ...).

1. Аксиомы стереометрии и следствия из них

Напомним три аксиомы, отличающие планиметрию от стереометрии:

- **A1.** Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.
- **A2.** Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
- **A3.** Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Из аксиом выводятся важнейшие следствия, которыми мы будем постоянно пользоваться:

1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.
2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Эти утверждения дают практические способы задания плоскости: тремя точками, не лежащими на одной прямой; прямой и точкой вне её; двумя пересекающимися прямыми (а также двумя параллельными прямыми).

2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве могут занимать одно из четырёх положений:

- **пересекаться** — иметь ровно одну общую точку; тогда через них проходит единственная плоскость;
- **быть параллельными** — лежать в одной плоскости и не иметь общих точек;
- **скрещиваться** — не лежать в одной плоскости (и, следовательно, не иметь общих точек);
- **совпадать**.

Определение параллельных прямых дословно переносится из планиметрии, однако принципиально новым объектом являются **скрещивающиеся прямые**: их существование — отличительная черта пространства. Классический пример — рёбра AB и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Теорема (признак скрещивающихся прямых). Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то прямые скрещиваются.

Доказательство (схема). Пусть $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = M$, $M \notin a$. Если бы a и b лежали в одной плоскости β, то β содержала бы прямую a и точку M; но плоскость, проходящая через прямую и не лежащую на ней точку, единственна, значит $\beta = \alpha$. Тогда $b \subset \alpha$, что противоречит условию $b \cap \alpha = M$. ■

Важным понятием является **угол между скрещивающимися прямыми**: через произвольную точку проводятся прямые, параллельные данным; угол между ними (берётся из промежутка $(0^\circ; 90^\circ]$) называется углом между скрещивающимися прямыми. Корректность определения обеспечивается тем, что угол между параллельными прямыми, проведёнными через разные точки, не зависит от выбора точки — это следствие теоремы о равенстве углов с сонаправленными сторонами: *углы с сонаправленными сторонами равны.*

3. Параллельность прямой и плоскости

Прямая и плоскость могут: пересекаться (единственная общая точка), быть параллельными (не иметь общих точек) либо прямая лежит в плоскости.

Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек. Обозначение: $a \parallel \alpha$.

Теорема. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Доказательство. Пусть $a \parallel b$, $b \subset \alpha$, $a \not\subset \alpha$. Если бы a пересекала α в точке M, то по предыдущей теореме прямые a и b скрещивались бы — противоречие с их параллельностью. ■

Обратное утверждение (необходимое условие) звучит слабее: если $a \parallel \alpha$, то в плоскости α существуют прямые, параллельные a (а именно — прямая пересечения α с плоскостью, проведённой через a и любую точку плоскости α).

Теорема о пересечении плоскостей. Если плоскость β проходит через прямую a, параллельную плоскости α, и пересекает α по прямой b, то $a \parallel b$. Доказательство опирается на аксиому А3 и на то, что параллельные прямые не могут иметь общих точек.

Теорема о трёх параллельных прямых. Если одна из двух параллельных прямых параллельна третьей прямой, то и вторая параллельна третьей. Отметим тонкость: транзитивность параллельности в пространстве нетривиальна, поскольку «параллельность» означает «лежать в одной плоскости и не пересекаться», и требуется доказать, что три прямые действительно лежат в одной плоскости.

4. Параллельность плоскостей

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема (признак). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

Доказательство (схема). Предположив, что $\alpha \cap \beta = c$, получим: прямая c пересекает плоскость α в некоторой точке M, значит, пересекает хотя бы одну из прямых плоскости α, а следовательно, пересекает и параллельную ей прямую плоскости β — противоречие. ■

Свойства параллельных плоскостей.

- Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.
- Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.
- Через точку вне данной плоскости проходит плоскость, параллельная данной, и притом только одна. Отсюда — **транзитивность**: если $\alpha \parallel \gamma$ и $\beta \parallel \gamma$, то $\alpha \parallel \beta$ (при $\alpha \neq \beta$).

Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от произвольной точки одной плоскости до другой; корректность (независимость от выбора точки) следует из того, что перпендикуляры к обеим плоскостям параллельны, а параллельные плоскости отсекают на них равные отрезки.

5. Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Прямая, перпендикулярная ко всем прямым плоскости, оказывается перпендикулярной и к прямым, которые с ней не пересекаются (например, к скрещивающимся прямым плоскости) — здесь вновь используется теорема об углах с сонаправленными сторонами.

Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая перпендикулярна к этой плоскости.

Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство классическое и несложное (сведение к случаю симметричных прямых через середину отрезка и применение теоремы о трёх перпендикулярах в планиметрической форме); его суть — в том, что достаточно проверить перпендикулярность лишь к **двум** пересекающимся прямым плоскости, а не ко всем.

Основные свойства:

- Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.
- Все прямые, перпендикулярные к данной плоскости и проходящие через данную точку, параллельны между собой (следствие единственности).
- Две прямые, перпендикулярные к одной плоскости, параллельны.

Расстояние от точки до плоскости — длина перпендикуляра, проведённого из точки к плоскости. Оно меньше длины любой наклонной и меньше разности длин любых двух наклонных; из двух наклонных больше та, у которой больше проекция, и наоборот.

Теорема о трёх перпендикулярах. Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной, перпендикулярна к её проекции тогда и только тогда, когда она перпендикулярна к самой наклонной. Эта теорема — один из главных рабочих инструментов при вычислении углов и расстояний.

6. Перпендикуляр и наклонная

Пусть точка A не принадлежит плоскости α, а точка H — основание перпендикуляра, опущенного из A на α (т. е. $AH \perp \alpha$). Для любой точки M плоскости α отрезок AM называется **наклонной**, а отрезок HM — её **проекцией** на плоскость α.

Из прямоугольного треугольника AHM следует цепочка соотношений:

$$AM^2 = AH^2 + HM^2, \qquad AM > AH,$$

то есть перпендикуляр, проведённый из точки к плоскости, короче любой наклонной, проведённой из той же точки. Именно поэтому за расстояние от точки до плоскости принимается длина перпендикуляра.

Теорема (о проекциях). Равные наклонные имеют равные проекции, и наоборот; из двух наклонных больше та, проекция которой больше.

7. Угол между прямой и плоскостью

Определение. Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую, называется угол между этой прямой и её проекцией на плоскость.

Если прямая a пересекает плоскость α в точке O, $AH \perp \alpha$, то искомый угол — это угол MOH, где M — произвольная точка прямой a, отличная от O, а H — основание перпендикуляра из M. Этот угол не превосходит 90°; для неперпендикулярной пересекающейся прямой он лежит в пределах $(0^\circ; 90^\circ)$.

Корректность определения обеспечивается теоремой: *проекция наклонной меньше наклонной, поэтому угол между наклонной и проекцией меньше угла между наклонной и любой другой прямой плоскости, проходящей через основание наклонной* — иначе говоря, проекция есть «наикратчайший» наклонный путь, а соответствующий угол минимален.

В вычислительной практике угол между прямой и плоскостью чаще всего находят через прямоугольный треугольник, либо через векторный аппарат:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\,|\vec{a}|},$$

где $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой, $\vec{n}$ — нормальный вектор плоскости.

8. Двугранный угол. Угол между плоскостями

Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости. Прямая a называется ребром, полуплоскости — гранями двугранного угла.

Градусная мера двугранного угла определяется через его линейный угол. Пусть O — произвольная точка ребра; в каждой из граней проведём луч, перпендикулярный ребру. Полученные лучи образуют **линейный угол** двугранного угла. Основной факт: *все линейные углы данного двугранного угла равны* (их стороны попарно сонаправлены, и они лежат в плоскости, перпендикулярной ребру). Поэтому величина двугранного угла не зависит от выбора точки O и равна градусной мере его линейного угла. Двугранный угол называется прямым, если его линейный угол равен 90°.

Определение. Углом между пересекающимися плоскостями называется угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в этих плоскостях в одной точке. Он не зависит от выбора точки на линии пересечения и лежит в промежутке $[0^\circ; 90^\circ]$.

В аналитическом задании угол между плоскостями с нормальными векторами $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}.$$

9. Перпендикулярность двух плоскостей

Определение. Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° (т. е. если одна из них содержит перпендикуляр к другой).

Теорема (признак). Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Доказательство (схема). Пусть $\alpha \cap \beta = c$, $a \subset \beta$, $a \perp \alpha$. Тогда $a \perp c$. Перпендикуляр к c, проведённый в плоскости α, и прямая a образуют линейный угол двугранного угла при ребре c; он равен 90°, значит, плоскости перпендикулярны. ■

Свойства перпендикулярных плоскостей.

- Если $\alpha \perp \gamma$ и $\beta \perp \gamma$, а прямая c — линия пересечения α и β, то $c \perp \gamma$. (Отсюда, в частности, следует существование прямой, перпендикулярной данной плоскости, — конструктивное доказательство упомянутого выше факта.)
- Прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная линии их пересечения, перпендикулярна другой плоскости (обратный переход признака).

10. Геометрические преобразования пространства

10.1. Движения

Определение. Движением пространства называется преобразование, сохраняющее расстояния между точками: если $X \mapsto X'$, $Y \mapsto Y'$, то $|X'Y'| = |XY|$.

Основные свойства движений: движение переводит прямую в прямую, плоскость в плоскость, сохраняет углы; композиция движений есть движение. Центральное место занимает следующая теорема.

Теорема. Любое движение пространства есть композиция не более чем четырёх движений следующих типов: тождественного, центральной симметрии, осевой симметрии, симметрии относительно плоскости, переноса на вектор, поворота вокруг прямой. (В учебной трактовке обычно формулируют: любое движение пространства либо является движением первого рода — перенос, поворот, винтовое движение, — либо второго рода — их композиции с симметрией относительно плоскости.)

Рассмотрим два преобразования, принципиальных для дальнейшего.

10.2. Параллельный перенос

Определение. Параллельным переносом на вектор $\vec{p}$ называется преобразование, переводящее каждую точку X в точку X' такую, что $\overrightarrow{XX'} = \vec{p}$.

Свойства параллельного переноса:

1. Перенос является движением, то есть сохраняет расстояния.
2. Он переводит прямую в параллельную ей прямую (или в себя), плоскость — в параллельную ей плоскость (или в себя).
3. Композиция двух переносов есть перенос на сумму векторов; обратное к переносу на $\vec{p}$ — перенос на $-\vec{p}$.
4. В координатах перенос задаётся формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, где $(a; b; c)$ — координаты вектора $\vec{p}$.

10.3. Симметрия относительно плоскости

Определение. Точки X и X' называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок XX' перпендикулярен α и делится ею пополам. Точки самой плоскости считаются симметричными самим себе. Преобразование $X \mapsto X'$ — **симметрия относительно плоскости** (зеркальная симметрия).

Свойства:

1. Зеркальная симметрия — движение (сохраняет расстояния), но движение второго рода: оно меняет ориентацию, поэтому не сводится к переносам и поворотам.
2. Все точки плоскости симметрии остаются неподвижными; плоскость симметрии переходит в себя.
3. Прямая, перпендикулярная плоскости симметрии, переходит в себя (точки меняются местами попарно); прямая, лежащая в плоскости симметрии, — в себя.
4. Фигура обладает **плоскостью симметрии**, если зеркальное отражение относительно неё переводит фигуру в себя. Примеры: у куба — девять плоскостей симметрии, у правильного тетраэдра — шесть.

11. Параллельное проектирование

Построение изображений пространственных фигур на плоскости опирается на аппарат **параллельного проектирования**.

Определение. Пусть заданы плоскость α и пересекающая её прямая l (направление проектирования), причём l не параллельна α. Параллельным проектированием на плоскость α в направлении l называется отображение, сопоставляющее точке M точку M' — точку пересечения α с прямой, проходящей через M параллельно l.

Свойства параллельного проектирования.

1. **Точки и отрезки.** Отрезок проектируется в отрезок (или точку, если он параллелен l).
2. **Параллельность.** Параллельные отрезки проектируются в параллельные отрезки (или в отрезки одной прямой); сохраняется и отношение длин: если $AB \parallel CD$, то $A'B'C'D'$ — параллелограмм или отрезок, а отрезки, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, проектируются с сохранением отношения длин.
3. **Сохранение простого отношения трёх точек** на прямой, в частности середина отрезка переходит в середину его изображения.
4. В общем случае параллельное проектирование **не сохраняет расстояния и углы**: неперпендикулярный к плоскости проекций отрезок меняет длину, прямой угол может спроектироваться не в прямой.

Частный случай параллельного проектирования — **ортогональное проектирование**, при котором направление l перпендикулярно плоскости α. Ортогональная проекция сохраняет длины отрезков, параллельных плоскости проекций, и вообще все метрические свойства фигур, лежащих в плоскостях, параллельных α.

12. Площадь ортогональной проекции

Теорема. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций:

$$S_{\text{пр}} = S\cos\varphi.$$

Идея доказательства. Для прямоугольника достаточно рассмотреть квадрат со стороной, одна из сторон которой параллельна линии пересечения плоскостей: эта сторона сохраняет длину, а перпендикулярная ей сторона проектируется с коэффициентом $\cos\varphi$. Произвольный многоугольник разбивается диагоналями на треугольники, каждый из которых проектируется с тем же коэффициентом; суммирование даёт искомую формулу. Для криволинейных фигур результат переносится интегрированием, но в школьном курсе достаточно многоугольников и, с оговоркой, круга. ■

Важные приложения.

- Формула позволяет вычислять площадь наклонной грани призмы или пирамиды по площади её ортогональной проекции (проекция боковой грани призмы на основание — «вырезанная» из основания часть).
- Обратная задача: зная обе площади, найти угол между плоскостями: $\cos\varphi = S_{\text{пр}}/S$.
- Классическая задача о сечении: если известно сечение многогранника, его площадь удобно вычислять через площадь проекции сечения на основание.

Отметим, что для **параллельного (неортогонального) проектирования** аналогичная формула справедлива с коэффициентом $\cos\varphi\cdot\cos\psi$, где ψ — угол между направлением проектирования и плоскостью проекций; в общем виде $S_{\text{пр}} = S\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta$, где θ — угол между направлением проектирования и плоскостью проектируемой фигуры.

13. Изображение пространственных фигур

Требования к изображению пространственной фигуры сформулированы в виде **аксиом параллельного проектирования** (правил изображения):

1. Если точка принадлежит фигуре, то её изображение принадлежит изображению фигуры (и обратно: каждая точка изображения является проекцией некоторой точки фигуры — изображение «покрывает» оригинал).
2. Отрезок изображается отрезком.
3. Параллельные отрезки изображаются параллельными (или лежащими на одной прямой) отрезками, при этом сохраняются отношения длин таких отрезков: середина отрезка изображается серединой его изображения, параллельные равные отрезки — равными отрезками.

Эти правила означают: **любая фигура, удовлетворяющая свойствам параллельного проектирования, может служить изображением** данной пространственной фигуры. Отсюда вытекают практические правила черчения:

- параллельность рёбер куба сохраняется на чертеже; равные рёбра, параллельные друг другу, изображаются равными;
- **параллельность — главный сохраняющийся признак**: если на чертеже четыре точки образуют параллелограмм, то и в оригинале они образуют параллелограмм, и наоборот;
- перпендикулярность, равенство непараллельных отрезков, отношение длин непараллельных отрезков на чертеже, вообще говоря, **не сохраняются**, поэтому «прямой угол» на изображении куба — это лишь обозначение, а не факт чертежа;
- окружность, не параллельная плоскости изображения, изображается эллипсом.

Стандартное (аксонометрическое) изображение куба: параллельные рёбра проводятся параллельными, «вертикальные» рёбра — вертикальными, а третья система параллельных обычно наклонена под углом около 45° с укорочением в отношении $1:2$ (косоугольная проекция типа «кабинетной»); в прямоугольных аксонометрических проекциях (изометрия) оси образуют углы в 120°, и все коэффициенты искажения по осям равны. Важно понимать: конкретный вид проекции — предмет соглашения; математическую корректность изображению придают именно аксиомы параллельного проектирования, а не точное соответствие реальным длинам.