ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 13. ТЕМА 12. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Событие и его виды

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений. Основополагающим понятием является **испытание (опыт)** — совокупность условий, при которых наблюдается тот или иной результат. **Событием** называется любой возможный результат испытания.

События обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, … Основные виды событий:

- **Достоверное** — событие, которое при данных условиях обязательно произойдёт (обозначается Ω);
- **невозможное** — событие, которое при данных условиях заведомо не произойдёт (обозначается $\varnothing$);
- **случайное** — событие, которое в данном испытании может как произойти, так и не произойти;
- **несовместные** — события, которые в одном испытании не могут произойти одновременно;
- **противоположное** к событию A — событие $\bar{A}$, состоящее в ненаступлении A; при этом $A + \bar{A} = \Omega$.

События A и B называются **равновозможными**, если нет оснований считать одно из них более вероятным, чем другое. Система событий образует **полную группу**, если в результате испытания обязательно наступает хотя бы одно из них.

Суммой событий $A + B$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них; произведением $A \cdot B$ — событие, состоящее в их совместном наступлении.

2. Вероятность события

Вероятность — числовая мера степени возможности наступления события.

2.1. Классическое определение

Вероятностью события A называется отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Свойства вероятности: $0 \le P(A) \le 1$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$.

2.2. Статистическое определение

При большом числе испытаний **относительная частота** события A, то есть отношение числа его появлений m к числу проведённых испытаний n, устойчиво колеблется около некоторого постоянного числа — статистической вероятности события. Длительные наблюдения (например, знаменитые опыты Ж. Бюффона и К. Пирсона с подбрасыванием монеты) подтверждают, что частота выпадения герба приближается к $0{,}5$ при увеличении числа испытаний.

2.3. Аксиоматическое построение

Современное строгое определение дано А. Н. Колмогоровым (1933): на множестве элементарных исходов вводится σ-алгебра событий и неотрицательная **вероятностная мера** P, удовлетворяющая аксиомам: $P(A) \ge 0$, $P(\Omega) = 1$, и для счётного набора попарно несовместных событий $P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

3. Сложение вероятностей

Теорема сложения несовместных событий. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие: сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице; в частности, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Теорема сложения совместных событий. Вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Формула обобщается на любое число событий; для трёх:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Вероятность наступления хотя бы одного из независимых в совокупности событий $A_1, \dots, A_n$ вычисляется через противоположные события:

$$P = 1 - q_1 q_2 \cdots q_n, \quad q_i = P(\bar{A}_i).$$

4. Умножение вероятностей. Условная вероятность. Независимость событий

Условной вероятностью $P(A \mid B)$ называется вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло.

Теорема умножения. Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(AB) = P(A)\,P(A \mid B) = P(B)\,P(B \mid A).$$

Отсюда следует **формула полной вероятности**: если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (гипотезы) образуют полную группу несовместных событий, то

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\,P(A \mid H_i).$$

На её основе строится **формула Бейеса**, позволяющая переоценить вероятности гипотез после того, как стало известно, что событие A произошло:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)\,P(A \mid H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)\,P(A \mid H_j)}.$$

Независимость событий. Событие A называется независимым от события B, если $P(A \mid B) = P(A)$. События A и B независимы тогда и только тогда, когда

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Для независимых в совокупности событий $A_1, \ldots, A_n$: $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$. Важно различать независимость и несовместность: если два несовместных события имеют положительные вероятности, они всегда зависимы.

5. Дискретная случайная величина и закон её распределения

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин. Случайные величины обозначают X, Y, Z.

Дискретной называется случайная величина, множество возможных значений которой конечно или счётно (значения можно перенумеровать).

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между её возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Он может быть задан таблицей, аналитически или графически. Обязательное условие (условие нормировки):

$$\sum_i p_i = 1.$$

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x) = P(X < x)$, определяющая вероятность того, что X примет значение, меньшее x. Для дискретной величины $F(x)$ — ступенчатая (кусочно-постоянная) функция.

Примеры основных законов распределения дискретных случайных величин:

- **биномиальный закон**: вероятность k успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха p в каждом — по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$;
- **закон Пуассона**: $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = np$ — параметр, равный среднему числу появлений события; применяется как предельный случай биномиального закона при больших n и малых p;
- **геометрический закон**: вероятность того, что событие впервые появится в k-м испытании, $P(X = k) = q^{k-1}p$.

6. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике часто достаточно её сводных характеристик.

6.1. Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i.$$

Математическое ожидание характеризует среднее (центральное) значение распределения и является неслучайной величиной. Основные свойства:

1. $M(C) = C$ для постоянной величины;
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$;
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$;
4. $M(XY) = M(X)\,M(Y)$ для независимых случайных величин.

6.2. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right] = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Дисперсия характеризует рассеяние возможных значений вокруг математического ожидания. Свойства: $D(C) = 0$; $D(CX) = C^2 D(X)$; дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Так как размерность дисперсии — квадрат размерности самой величины, вводится более удобная характеристика:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

— **среднее квадратическое отклонение** (стандартное отклонение).

6.3. Мода и другие характеристики

Модой называется наиболее вероятное значение дискретной случайной величины. Дополнительно используются квантили и коэффициент вариации $V = \dfrac{\sigma}{M(X)} \cdot 100\%$ — относительная мера рассеяния.

7. Понятие о законе больших чисел

Закон больших чисел — совокупность теорем, устанавливающих, что при большом числе испытаний средний арифметический результат стремится к некоторому постоянному значению, а частота события — к его вероятности. Тем самым математическое ожидание получает статистическое обоснование.

Неравенство Чебышёва. Вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания по абсолютной величине меньше любого положительного числа ε, не меньше, чем $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P\big(|X - M(X)| < \varepsilon\big) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышёва. Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ попарно независимы, имеют конечные математические ожидания и равномерно ограниченные дисперсии, то при неограниченном увеличении n среднее арифметическое этих величин сходится по вероятности к среднему их математических ожиданий:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Частный случай — **теорема Бернулли**: при неограниченном увеличении числа независимых испытаний частота появления события сходится по вероятности к его вероятности в каждом испытании. Закон больших чисел объясняет устойчивость массовых случайных явлений и лежит в основе статистических методов. Родственной задачей занимается **центральная предельная теорема** (Ляпунов и др.), устанавливающая условия, при которых сумма большого числа независимых слагаемых имеет распределение, близкое к нормальному.

8. Показатели вариации в статистике

Вариация — количественное различие значений признака у единиц статистической совокупности. Основные показатели:

1. **Размах вариации**: $R = x_{\max} - x_{\min}$ — разность между наибольшим и наименьшим значениями признака.
2. **Среднее линейное отклонение**:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} \quad \text{(простое)}, \qquad \bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| f_i}{\sum f_i} \quad \text{(взвешенное)}.$$

3. **Дисперсия**:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}; \qquad \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}.$$

4. **Среднее квадратическое отклонение**: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.
5. **Коэффициент вариации**:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

Совокупность считается однородной, а вариация — умеренной, если $V \leq 33\%$.

Для альтернативного признака дисперсия принимает специальный вид: если доля единиц, обладающих признаком, равна p, а не обладающих — $q = 1 - p$, то дисперсия доли равна $pq = p(1 - p)$, а её максимум $0{,}25$ достигается при $p = 0{,}5$.

9. Выборочное наблюдение

Выборочное наблюдение — метод статистического исследования, при котором обследуется не вся совокупность, а лишь её часть (выборка), отобранная по определённым правилам, с последующим распространением результатов на всю совокупность. Вся совокупность единиц называется **генеральной**.

Теоретической основой метода служит закон больших чисел: при достаточно большой случайной выборке её характеристики с высокой вероятностью близки к характеристикам генеральной совокупности.

9.1. Способы отбора

- **случайный (жеребьёвка, случайные числа)** — единицы отбираются наудачу;
- **механический** — отбор через равные интервалы из упорядоченного списка;
- **типический (стратифицированный)** — совокупность предварительно разбивается на однородные группы, из каждой отбирается пропорционально;
- **серийный (гнездовой)** — отбираются целые серии (группы), внутри которых обследуются все единицы.

Отбор может быть **повторным** (отобранная единица возвращается в совокупность) и **бесповторным** (не возвращается; на практике применяется чаще).

9.2. Ошибки выборки

Различают ошибки регистрации (случайные и систематические) и ошибки репрезентативности.

Средняя ошибка выборки для средней:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \quad \text{(повторный отбор)}, \qquad \mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)} \quad \text{(бесповторный отбор)},$$

где N — объём генеральной совокупности. Средняя ошибка для доли вычисляется аналогично с заменой σ^2 на pq.

Предельная ошибка выборки связана со средней через коэффициент доверия t, определяемый по таблицам нормального распределения для заданной доверительной вероятности:

$$\Delta = t\mu, \qquad \bar{x} - \Delta \le \bar{X} \le \bar{x} + \Delta,$$

где $\bar{X}$ — генеральная средняя. Обычно принимают доверительную вероятность $0{,}954$ ($t = 2$) или $0{,}997$ ($t = 3$).

9.3. Определение необходимой численности выборки

Из формулы предельной ошибки вытекает необходимый объём выборки при повторном отборе:

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\Delta^2},$$

а при бесповторном отборе — с поправочным множителем $\dfrac{1}{1 + \dfrac{t^2\sigma^2}{\Delta^2 N}}$. На практике σ^2 оценивается по данным пробного обследования или предыдущих исследований.