ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 12. ТЕМА 11. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. Предмет комбинаторики и основные понятия

Комбинаторика — раздел математики, изучающий способы подсчёта количества элементов конечных множеств, а также методы их построения и упорядочения. Центральная задача комбинаторики формулируется следующим образом: определить, сколькими способами можно осуществить выбор или расположение элементов заданного множества при определённых условиях.

Базовыми понятиями комбинаторики являются:

Множество — совокупность различимых объектов (элементов), рассматриваемая как единое целое. Множество называется конечным, если число его элементов равно некоторому натуральному числу n.

Выборка — подмножество или упорядоченная последовательность элементов исходного множества. Если порядок элементов в выборке существен, выборка называется упорядоченной; если несуществен — неупорядоченной.

Факториал натурального числа n обозначается n! и определяется как произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

По соглашению $0! = 1$. Факториал стремительно растёт: $5! = 120$, а $10! = 3\,628\,800$.

Правило суммы. Если объект A может быть выбран m способами, а объект B — k способами, причём выборы A и B не пересекаются, то выбрать «A или B» можно $m + k$ способами.

Правило произведения. Если объект A может быть выбран m способами, и после каждого такого выбора объект B может быть выбран k способами, то пара «A и B» может быть выбрана $m \cdot k$ способами. Правило обобщается на произвольное конечное число последовательных выборов.

Пример применения правила произведения: из города A в город B ведут 3 дороги, из B в город C — 4 дороги. Маршрут A → B → C можно пройти $3 \cdot 4 = 12$ способами.

2. Перестановки

Перестановками из n элементов называются всевозможные упорядочивания всех n различных элементов множества. Перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

Обоснование: на первое место можно поставить любой из n элементов, на второе — любой из оставшихся $n-1$, и так далее; по правилу произведения общее число упорядочиваний равно

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Пример. Сколькими способами можно расставить на полке 5 книг? Ответ: $P_5 = 5! = 120$.

Перестановки с повторениями. Если среди n элементов имеется n_1 одинаковых элементов первого типа, n_2 — второго типа, …, n_k — k-го типа, причём $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, то число различных перестановок (размещений с повторениями) равно:

$$\overline{P}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

Пример. Число различных перестановок букв слова «МАТЕМАТИКА» (10 букв: М — 2, А — 3, Т — 2, Е — 1, И — 1, К — 1) равно

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{3\,628\,800}{24} = 151\,200$$

3. Размещения

Размещениями из n элементов по k (обозначается A_n^k) называются упорядоченные выборки, содержащие k различных элементов из n данных. Два размещения различны, если они отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Формула числа размещений:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример. Сколькими способами можно распределить золотую, серебряную и бронзовую медали среди 8 спортсменов? Порядок существен (важно, кто занял какое место), повторения невозможны:

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Размещения с повторениями. Если элементы могут повторяться, то число упорядоченных выборок длины k из n типов элементов равно n^k. Это следствие правила произведения: на каждом из k мест независимо может стоять любой из n элементов.

4. Сочетания

Сочетаниями из n элементов по k (обозначается C_n^k, встречается также запись $\binom{n}{k}$) называются неупорядоченные выборки из k различных элементов, взятых из n данных. В сочетании, в отличие от размещения, порядок элементов не учитывается.

Между сочетаниями и размещениями существует очевидная связь: каждому сочетанию из k элементов соответствует $k!$ его перестановок. Поэтому

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать 2 дежурных из 7 учеников? Порядок не имеет значения:

$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Сочетания с повторениями. Если допускается выбор одного элемента несколько раз, число неупорядоченных выборок k элементов из n типов равно:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Пример. Сколько способов купить 4 пирожка, если в продаже 3 видов пирожков? Ответ: $\overline{C}_3^4 = C_6^4 = 15$.

5. Решение задач методом перебора вариантов

Метод полного перебора (перебора всех возможных вариантов) — универсальный приём решения комбинаторных задач, состоящий в систематическом построении и подсчёте всех допустимых конфигураций. Перебор особенно удобен при малых значениях параметров, а также для проверки результатов, полученных формульными методами.

При организации перебора применяются:

- **Таблицы вариантов** — при подсчёте пар или результатов сравнения двух групп объектов;
- **Дерево вариантов** — при построении последовательностей выборов: каждый уровень дерева соответствует очередному шагу выбора, а число концевых вершин равно искомому количеству вариантов.

Пример. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 при условии, что цифры не повторяются? Дерево вариантов: первой цифрой может быть любая из трёх (3 ветви), второй — любая из двух оставшихся (по 2 ветви). Всего $3 \cdot 2 = 6$ чисел: 12, 13, 21, 23, 31, 32. Результат совпадает с формулой размещений: $A_3^2 = 6$.

Метод перебора также лежит в основе строгих доказательств: при малых n все случаи могут быть проверены непосредственно, а при больших перебор заменяется индуктивными рассуждениями.

6. Бином Ньютона

Формула бинома Ньютона даёт разложение степени двучлена $(a+b)^n$ в сумму степенных слагаемых:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, a n — натуральное число.

Частные случаи:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

Коэффициенты при степенях образуют строки, известные из треугольника Паскаля: для $n = 3$ это 1, 3, 3, 1.

Каждое слагаемое $C_n^k a^{n-k} b^k$ называется членом разложения. Сумма показателей степеней a и b в каждом члене постоянна и равна n. Число членов разложения равно $n + 1$.

Биномиальные коэффициенты имеют комбинаторный смысл: C_n^k равно числу способов выбрать k множителей (из которых берётся b) среди n множителей произведения $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$.

Степень бинома с n = 0 допускается по соглашению: $(a+b)^0 = 1$.

7. Свойства биномиальных коэффициентов

Биномиальные коэффициенты обладают следующими основными свойствами.

Симметрия:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Обоснование: выбрать k элементов из n — то же самое, что указать $n-k$ элементов, которые не будут выбраны.

Крайние значения. $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Рекуррентное соотношение (правило Паскаля):

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Обоснование: все сочетания из n элементов по k делятся на два непересекающихся класса — содержащие фиксированный элемент (их C_{n-1}^{k-1}) и не содержащие его (их C_{n-1}^k).

Сумма коэффициентов разложения. Полагая в формуле бинома Ньютона $a = b = 1$, получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Это число всех подмножеств n-элементного множества.

Знакочередующаяся сумма. Полагая $a = 1$, $b = -1$, получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

Свойство равенства сумм чётных и нечётных коэффициентов следует из предыдущего соотношения.

Возрастание и максимум. Последовательность $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ возрастает до середины строки и затем убывает симметрично: наибольшим является средний коэффициент $C_n^{n/2}$ при чётном n либо два равных средних коэффициента $C_n^{(n-1)/2} = C_n^{(n+1)/2}$ при нечётном n.

Тождество Вандермонда:

$$\sum_{k=0}^{r} C_m^k C_n^{r-k} = C_{m+n}^r$$

Комбинаторное обоснование: выбирая r элементов из объединения двух непересекающихся множеств размеров m и n, можно взять k элементов из первого и $r-k$ из второго; суммирование по всем k даёт полное число способов.

8. Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля — бесконечная числовая таблица треугольной формы, в которой по краям каждой строки стоят единицы, а каждое внутреннее число равно сумме двух расположенных над ним чисел. В отечественной традиции таблица называется также арифметическим треугольником; первые её описания в Европе относятся к XVI веку, а систематическое изложение дано Блезом Паскалем в трактате «Трактат об арифметическом треугольнике» (1654).

Начало треугольника имеет вид:

text Переносить Свернуть Копировать

```
n = 0:            1
n = 1:          1   1
n = 2:        1   2   1
n = 3:      1   3   3   1
n = 4:    1   4   6   4   1
n = 5:  1   5  10  10   5   1
n = 6: 1  6  15  20  15   6   1
```

Основные свойства треугольника:

1. Строка с номером n состоит из биномиальных коэффициентов $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$, то есть коэффициентов разложения $(a+b)^n$. Это делает треугольник практическим инструментом возведения двучлена в степень: например, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
2. Правило построения строки по предыдущей (сложение соседних чисел) является геометрической иллюстрацией тождества Паскаля $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.
3. Сумма чисел строки с номером n равна 2^n.
4. Каждая строка симметрична относительно центра, что отражает свойство $C_n^k = C_n^{n-k}$.
5. Диагонали треугольника обладают собственным содержанием: крайние диагонали состоят из единиц, следующая диагональ образует последовательность натуральных чисел, далее следуют треугольные числа $(1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$ — суммы последовательных натуральных чисел.

Числа треугольника Паскаля связаны также с задачей о числе путей в целочисленной решётке: значение в узле равно числу кратчайших путей из вершины треугольника в этот узел, что даёт наглядную интерпретацию сочетаний C_n^k.