ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 11. ТЕМА 11. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. Уравнение прямой на плоскости

Прямая на плоскости может быть задана несколькими эквивалентными формами, выбор которых определяется исходными данными задачи.

Общее уравнение прямой:
$Ax + By + C = 0$, где A, B не равны нулю одновременно. Вектор $\vec{n} = (A, B)$ является нормальным вектором прямой.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:
$y = kx + b$, где $k = \tan\varphi$ — угловой коэффициент (φ — угол наклона прямой к оси Ox), b — ордината точки пересечения с осью Oy.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \text{при условии } x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2.$$

Каноническое уравнение прямой (через точку и направляющий вектор $\vec{s} = (l, m)$):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Параметрические уравнения прямой:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Алгоритм приведения уравнения прямой к требуемому виду

1. Если дано общее уравнение $Ax + By + C = 0$ и требуется получить уравнение с угловым коэффициентом:
   - Проверить, что $B \neq 0$.
   - Выразить y: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.
   - Обозначить $k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$.
2. Если даны две точки:
   - Найти разности координат: $\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1$.
   - Записать каноническое уравнение.
   - При необходимости преобразовать к общему или параметрическому виду.
3. Если заданы точка и направляющий вектор:
   - Подставить в каноническую форму.
   - При необходимости перейти к общему уравнению, умножив обе части на знаменатели и приведя подобные.

2. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой

Угол между двумя прямыми определяется через их угловые коэффициенты или направляющие векторы.

Пусть прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Тангенс угла φ между ними:

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|, \quad \text{если } 1 + k_1k_2 \neq 0.$$

Если $1 + k_1k_2 = 0$, то прямые перпендикулярны.

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, угол φ между нормальными векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ вычисляется по формуле скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ **до прямой** $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Алгоритмы действий

1. **Вычисление угла между прямыми**:
   - Определить форму уравнений (угловой коэффициент или общее).
   - Если есть k_1, k_2, использовать формулу с тангенсом.
   - Если даны общие уравнения, вычислить скалярное произведение нормальных векторов и их длины, затем найти косинус угла.
   - Перевести значение в градусы или радианы по необходимости.
2. **Вычисление расстояния от точки до прямой**:
   - Убедиться, что уравнение прямой приведено к общему виду $Ax + By + C = 0$.
   - Подставить координаты точки в числитель формулы.
   - Вычислить знаменатель как норму нормального вектора.
   - Оценить модуль и поделить.

3. Линии второго порядка на плоскости

Линии второго порядка задаются общим уравнением:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

Классификация линий второго порядка основана на инвариантах:

- $I_1 = A + C$ (след матрицы квадратичной формы),
- $I_2 = AC - B^2$ (определитель матрицы квадратичной формы),
- I_3 — определитель расширенной матрицы коэффициентов.

В зависимости от знаков и значений инвариантов различают:

- эллиптический тип ($I_2 > 0$),
- гиперболический тип ($I_2 < 0$),
- параболический тип ($I_2 = 0$).

При отсутствии члена с xy ($B = 0$) классификация упрощается, и уравнение можно привести к каноническому виду путём выделения полных квадратов.

4. Уравнение окружности, эллипса, гиперболы и параболы на плоскости

Окружность с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Эллипс с центром в начале координат и полуосями a, b:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Фокусы расположены на большей оси на расстоянии $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$ от центра.

Гипербола с центром в начале координат:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{горизонтальная}) \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (\text{вертикальная}).$$

Асимптоты: $y = \pm\frac{b}{a}x$ (для горизонтальной гиперболы).

Парабола с вершиной в начале координат:

- Горизонтальная ветвь: $y^2 = 2px$.
- Вертикальная ветвь: $x^2 = 2py$.
  Параметр p — расстояние от фокуса до директрисы.

ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

Алгоритмы приведения уравнений к каноническому виду

1. Для уравнения общего вида:
    - Проверить наличие члена xy. Если он есть, требуется поворот системы координат (через собственные векторы матрицы квадратичной формы).
    - Если $B = 0$, выделить полные квадраты относительно x и y.
2. После выделения квадратов:
    - Перенести свободный член в правую часть.
    - Разделить обе части на константу, чтобы получить 1 в правой части (для эллипса и гиперболы) или оставить одну переменную в квадрате (для параболы).
3. Проверить соответствие канонической форме и определить тип кривой.