ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 11. ТЕМА 10. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. Вводные понятия

Уравнение — равенство вида $f(x) = g(x)$, содержащее неизвестную величину x, определённую на некотором множестве X. **Решением (корнем)** уравнения называется значение $x_0 \in X$, при подстановке которого получается верное числовое равенство. Множество всех решений называется **множеством корней** уравнения.

Неравенство — выражение вида $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$. Его решением называется значение x_0, при котором соответствующее числовое неравенство оказывается верным; множество решений, как правило, представляет собой промежуток (или объединение промежутков) числовой прямой.

Уравнение или неравенство с двумя переменными $f(x, y) = 0$ (соответственно $f(x, y) > 0$) задаёт **множество точек координатной плоскости**, а система таких соотношений задаёт пересечение соответствующих множеств.

2. Равносильность уравнений, неравенств и систем

Два уравнения называются **равносильными** на множестве X, если множества их решений на этом множестве совпадают. Аналогично определяется равносильность неравенств и систем.

Преобразования, **гарантирующие** равносильность:

- прибавление к обеим частям одного и того же числа или выражения, определённого на X;
- умножение обеих частей на функцию, принимающую на X только отличные от нуля значения одного знака;
- замена уравнения равносильной системой (стандартный приём: возведение в чётную степень, логарифмирование и т. п. дополняются условием существования).

Преобразования, **не гарантирующие** равносильность (при их применении обязательна проверка или учёт ОДЗ):

- возведение обеих частей в чётную степень — возможно появление посторонних корней;
- освобождение от знаменателя, содержащего неизвестную, — возможно приобретение посторонних корней;
- логарифмирование при неотрицательном основании-функции;
- деление обеих частей на выражение с неизвестной — возможна **потеря корней** (например, при делении уравнения $x^2 = x$ на x теряется корень $x = 0$).

Общий принцип: при расширении или сужении ОДЗ каждое преобразование должно сопровождаться либо проверкой найденных корней подстановкой, либо явным добавлением/исключением условий.

3. Уравнения и системы уравнений

3.1. Рациональные уравнения

К ним относятся целые (многочленные) и дробно-рациональные уравнения. Уравнение

$$P(x) = 0, \quad P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

решается разложением левой части на множители (вынесение общего множителя, формулы сокращённого умножения, группировка, теорема Безу и подбор целых корней среди делителей свободного члена) либо заменой переменной.

Дробно-рациональное уравнение $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Игнорирование знаменателя — типичная ошибка, приводящая к посторонним корням.

3.2. Иррациональные уравнения

Уравнения, содержащие неизвестную под знаком корня. Базовая схема:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Условие $g(x) \geq 0$ существенно: без него возведение в квадрат порождает посторонние решения. Альтернативный путь — замена $t = \sqrt{f(x)}$ с учётом $t \geq 0$, а также графический метод.

3.3. Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$. Ключевое равносильное преобразование:

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \iff f(x) = \varphi(x).$$

Общий алгоритм: привести все степени к одному основанию (или к выражению вида $t = a^{u(x)}$, что сводит уравнение к алгебраическому относительно $t > 0$). Типичные приёмы — вынесение общего множителя-степени и замена переменной.

3.4. Тригонометрические уравнения

Простейшие уравнения имеют семейства решений:

$$\sin x = a\ (|a| \le 1): \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = a\ (|a| \le 1): \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a: \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Сводящиеся случаи:

1. **Квадратные относительно одной функции**: уравнения вида $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$ после замены $t = \sin x,\ |t| \le 1$.
2. **Однородные уравнения** $a\sin x + b\cos x = 0$: деление на $\cos x$ (корни вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ при этом не теряются, так как $\sin x$ и $\cos x$ не обращаются в нуль одновременно) даёт $\operatorname{tg} x = -\frac{a}{b}$.
3. **Метод введения вспомогательного угла**: $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, откуда следует необходимое условие разрешимости $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}$.
4. **Формулы понижения степени и суммы** — приведение произведения или суммы тригонометрических функций к нулю через разложение на множители.

Отбор корней на заданном промежутке выполняется с помощью тригонометрической окружности, неравенств либо (эффективно на экзаменах) графического метода.

3.5. Системы уравнений

Система означает требование одновременного выполнения всех уравнений; **совокупность** — выполнения хотя бы одного. Множество решений системы есть пересечение множеств решений её уравнений.

Основные методы:

- **метод подстановки**: выражение одной переменной через другую из одного уравнения и подстановка в остальные; метод универсален для систем с двумя неизвестными;
- **метод алгебраического сложения**: линейное комбинирование уравнений для исключения одной переменной;
- **метод введения новых неизвестных** (симметрические системы, системы с обратными величинами, произведения переменных);
- **разложение на множители**: если из системы следует равенство $\Phi(x, y) = 0$ с разложимой левой частью, система распадается на совокупность более простых;
- **графический метод**: построение кривых $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$; точки пересечения дают решения, число которых оценивается по числу точек пересечения.

Для линейной системы $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ возможны три случая: единственное решение (прямые пересекаются), бесконечно много решений (прямые совпадают — коэффициенты пропорциональны), отсутствие решений (прямые параллельны).

4. Неравенства

4.1. Основные свойства

При решении используются следующие равносильные преобразования: прибавление любого выражения к обеим частям; умножение на положительное выражение сохраняет знак неравенства, на отрицательное — меняет его на противоположный; возведение обеих частей в нечётную степень равносильно, в чётную — нет (требует условия неотрицательности частей или разбора случаев).

Важнейшее правило «равносильности по знакам», лежащее в основе метода интервалов: для любого выражения $F(x)$ неравенства $F(x) > 0$, $F(x) < 0$, $F(x) \geq 0$, $F(x) \leq 0$ равносильны соответствующим неравенствам относительно знака F. Отсюда, в частности,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \iff P(x) \cdot Q(x) > 0,$$

а

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \iff \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

4.2. Рациональные неравенства

Целое неравенство $P(x) > 0$ решается разложением многочлена на линейные множители с последующим методом интервалов. Дробно-рациональное сводится к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (или ≥ 0) переносом всех членов в одну сторону и решается методом интервалов с учётом кратных корней: корни нечётной кратности меняют знак, чётной — нет; корни знаменателя всегда «выколоты».

4.4. Иррациональные неравенства

Стандартные равносильные переходы:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Разбор случаев по знаку правой части обязателен: попытка прямого возведения в квадрат без учёта знака приводит к потере части множества решений.

4.5. Показательные неравенства

При основании $a > 1$ знак неравенства сохраняется, при $0 < a < 1$ — меняется:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) > g(x) \quad (a > 1);$$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) < g(x) \quad (0 < a < 1).$$

Замена $t = a^{u(x)} > 0$ сводит неравенство к алгебраическому относительно t.

4.6. Тригонометрические неравенства

Решаются с опорой на графики тригонометрических функций либо тригонометрическую окружность: множество $\{x : \sin x > a\}$ на окружности соответствует дуге, на которой ордината превышает a; аналогично для косинуса (абсцисса) и тангенса. Формализованная схема: решить соответствующее уравнение и выбрать промежутки между его корнями, где знак функции нужный; ответ записывается в виде объединения периодически повторяющихся промежутков.

4.7. Системы неравенств

Решение системы — пересечение множеств решений её неравенств: на числовой прямой изображаются все множества, их общая часть даёт ответ. Совокупность неравенств даёт объединение. При решении сложных систем каждое неравенство заменяется равносильным, при этом ОДЗ всей системы учитывается целиком.

5. Использование свойств и графиков функций

Функциональный подход позволяет решать задачи, труднодоступные чисто алгебраическими методами:

- **Область определения и множество значений.** Если уравнение $f(x) = g(x)$ таково, что $E(f) \cap E(g) = \{c\}$ (единственное общее значение), то всякое решение должно удовлетворять системе $f(x) = c,\ g(x) = c$ — приём «оценки» (минимум-максимум).
- **Монотонность.** Если f строго возрастает, то $f(\varphi(x)) = f(\psi(x)) \iff \varphi(x) = \psi(x)$; если строго возрастает на промежутке, уравнение $f(x) = a$ имеет на нём не более одного корня. Аналогичные рассуждения для неравенств: возрастающая функция переносит знак неравенства с внешнего выражения на аргумент.
- **Чётность и нечётность** дают симметрию множества корней относительно нуля; **периодичность** сводит поиск корней к промежутку длины периода.
- **Графический метод.** Уравнение $f(x) = g(x)$ решается построением графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$: абсциссы точек пересечения — корни. Для неравенства $f(x) > g(x)$ ответ — промежутки, где график f лежит выше графика g. Метод эффективен для оценки числа корней и локализации их значений; точные значения при рациональных абсциссах пересечения могут быть найдены алгебраически.
- **Геометрический смысл**: например, уравнение $\sqrt{1 - x^2} = kx + b$ сводится к взаимному расположению полуокружности и прямой, что даёт наглядный разбор числа решений в зависимости от параметров.

6. Множества решений на координатной плоскости

Уравнение $f(x, y) = 0$ задаёт на плоскости кривую (линию уровня), неравенство $f(x, y) > 0$ — область, границей которой служит эта кривая. Направление области («выше — ниже», «внутри — вне») определяется подстановкой контрольной точки.

Примеры базовых фигур:

- $y = kx + b$ — прямая; $y > kx + b$ — полуплоскость выше прямой;
- $x^2 + y^2 = R^2$ — окружность радиуса R с центром в начале координат; $x^2 + y^2 < R^2$ — открытый круг;
- $y = x^2$, $x = y^2$, $xy = k$ — парабола и гипербола; неравенства задают области относительно них.

Множество решений системы $\begin{cases} f(x, y) \geq 0 \\ g(x, y) \geq 0 \end{cases}$ — пересечение областей; **совокупности** — их объединение. Задачи на этой идеях включают: изображение решений линейных и квадратичных неравенств, систем, а также нетривиальные множества вида $\max(f, g) = 0$, $|x| + |y| = a$ (квадрат с вершинами на осях), $|x - a| + |y - b| \leq c$.

С этой техникой тесно связаны задачи **с параметром**: уравнение $F(x, a) = 0$ рассматривается в плоскости (x, a), и требуемому условию (например, «ровно два корня») отвечает подсчёт точек пересечения горизонтальной прямой $a = a_0$ с изображённым множеством.