ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 10. ТЕМА 10. ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

1. Понятие вектора. Основные определения

Вектор — это направленный отрезок, характеризуемый длиной (модулем) и направлением. В аналитическом представлении в n-мерном пространстве вектор $\vec{a}$ задаётся упорядоченным набором координат:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

В трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ вектор может быть выражен через базисные орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Модуль (длина) вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Нулевой вектор $\vec{0}$ имеет нулевую длину и неопределённое направление. Единичный вектор (орт) имеет длину, равную 1. Для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ его орт определяется как:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Два вектора считаются равными, если они имеют одинаковую длину и направление (координаты совпадают). Коллинеарные векторы лежат на параллельных прямых либо на одной прямой; компланарные — лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

2. Линейные операции над векторами

2.1. Сложение векторов

Пусть $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда их сумма:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

Геометрически сложение может выполняться по правилу треугольника или параллелограмма.

Алгоритм сложения векторов в координатах:

1. Выписать координаты первого вектора $\vec{a}$.
2. Выписать координаты второго вектора $\vec{b}$.
3. Попарно сложить соответствующие координаты.
4. Записать результирующий вектор $\vec{c}$.

2.2. Умножение вектора на скаляр

Для скаляра $\lambda \in \mathbb{R}$ и вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

При $\lambda > 0$ направление вектора сохраняется, при $\lambda < 0$ — меняется на противоположное. Длина умножается на $|\lambda|$.

Алгоритм умножения вектора на скаляр:

1. Определить скаляр λ и вектор $\vec{a}$.
2. Умножить каждую координату вектора на λ.
3. Записать результат.

2.3. Вычитание векторов

Разность векторов определяется как:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}.$$

В координатах:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z).$$

Алгоритм вычитания векторов:

1. Записать координаты $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. Вычислить разность соответствующих координат.
3. Записать вектор-разность.

Свойства линейных операций (ассоциативность, коммутативность сложения, дистрибутивность умножения на скаляр и др.) следуют из аксиом векторного пространства.

3. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется двумя эквивалентными способами:

1. Через координаты:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

2. Через длины и угол φ между векторами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Из второго определения следует, что скалярное произведение позволяет находить угол между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Векторы ортогональны, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Алгоритм вычисления скалярного произведения и угла между векторами:

1. Получить координаты $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. Вычислить скалярное произведение по координатной формуле.
3. Найти модули векторов.
4. Вычислить $\cos \varphi$ по формуле выше.
5. Найти угол $\varphi = \arccos(\cos \varphi)$ (в радианах или градусах).

4. Векторное произведение векторов (в $\mathbb{R}^3$)

Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ — это вектор, перпендикулярный плоскости, содержащей $\vec{a}$ и $\vec{b}$, с длиной:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi,$$

и направлением, определяемым правилом правой руки.

В координатах через определитель:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель, получаем:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x).$$

Векторное произведение антикоммутативно: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

Алгоритм нахождения векторного произведения:

1. Записать координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. Составить формальный определитель с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
3. Вычислить компоненты результата по формулам для определителя 3×3.
4. Представить результат в виде вектора.

5. Смешанное произведение трёх векторов

Смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ определяется как:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Оно равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, с учётом знака. В координатах:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Алгоритм проверки компланарности и вычисления объёма:

1. Записать координаты трёх векторов.
2. Составить определитель 3×3 из их координат.
3. Вычислить определитель.
4. Если результат равен 0, векторы компланарны. Иначе модуль определителя — объём параллелепипеда.

6. Линейная зависимость и базис

Система векторов $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ линейно зависима, если существуют коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, такие что:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}.$$

В $\mathbb{R}^3$ любые три некомпланарных вектора образуют базис. Любой вектор пространства единственным образом раскладывается по базису:

$$\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3.$$

Коэффициенты α, β, γ — координаты вектора в данном базисе.