ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 10. ТЕМА 9. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1. Числовые последовательности

Определение. Числовой последовательностью называется функция, определённая на множестве натуральных чисел: каждому натуральному числу n поставлено в соответствие единственное действительное число a_n. Обозначение: (a_n) или $\{a_n\}$.

Способы задания последовательности:

1. **Аналитический** — задание формулы общего члена: $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = (-1)^n$.
2. **Рекуррентный** — задание первого (или нескольких первых) членов и правила перехода от предыдущих членов к последующим: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2$ (арифметическая прогрессия); $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.
3. **Словесное описание** — например, последовательность простых чисел: $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$
4. **Табличный (перечислением)** — прямое указание членов последовательности.

Свойства последовательностей:

- **Монотонность.** Последовательность называется возрастающей, если $a_{n+1} > a_n$ для всех n, невозрастающей, если $a_{n+1} \leq a_n$; аналогично определяются убывающая и неубывающая последовательности. Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются монотонными.
- **Ограниченность.** Последовательность ограничена сверху, если существует число M такое, что $a_n \leq M$ для всех n; ограничена снизу, если существует m такое, что $a_n \geq m$; ограничена, если она ограничена и сверху, и снизу.
- Пример: последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ монотонно убывает и ограничена снизу нулём; последовательность $a_n = n$ монотонно возрастает и неограниченна сверху; последовательность $a_n = (-1)^n$ ограничена, но не монотонна.

2. Предел последовательности

Определение. Число a называется пределом последовательности (a_n), если для любого положительного числа ε существует натуральное число N такое, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Запись: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; не имеющая предела — расходящейся.

Геометрически это означает: какую бы узкую окрестность точки a мы ни выбрали, все члены последовательности с достаточно большими номерами попадают в эту окрестность.

Основные свойства пределов:

- Сходящаяся последовательность ограничена (обратное неверно: $(-1)^n$ ограничена, но расходится).
- Если $\lim a_n = a$ и $\lim b_n = b$, то

$$\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b, \qquad \lim(a_n\, b_n) = ab, \qquad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}\ (b \neq 0).$$

- Если все члены последовательности заключены между членами двух сходящихся последовательностей с общим пределом a, то её предел также равен a (теорема о двух милиционерах).

Пример: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2$.

3. Существование предела монотонной ограниченной последовательности

Теорема Вейерштрасса. Всякая монотонно возрастающая и ограниченная сверху числовая последовательность имеет предел; всякая монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность имеет предел.

Идея доказательства: члены монотонно возрастающей ограниченной сверху последовательности не могут «перепрыгнуть» верхнюю границу, поэтому с ростом n они накапливаются у некоторого числа, которое и является пределом. На этой теореме основано существование таких фундаментальных объектов, как число $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

4. Суммирование последовательностей. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Определение. Суммой последовательности (a_n) называется выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, обозначаемое $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Частичной суммой называется $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Если последовательность частичных сумм S_n имеет конечный предел S, ряд называется сходящимся, а число S — его суммой.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Геометрическая прогрессия с первым членом b_1 и знаменателем q называется бесконечно убывающей, если $|q| < 1$. Её частичная сумма:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Так как $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, и сумма прогрессии равна

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Пример: $0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + \cdots = \dfrac{0{,}5}{1 - 0{,}5} = 1$. Другой пример — разложение периодической дроби в обыкновенную: $0{,}(27) = 0{,}27 + 0{,}0027 + \cdots = \dfrac{27}{99} = \dfrac{3}{11}$.

5. Производная функции

Определение. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0, то есть тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$.

Физический смысл. Если $s = s(t)$ — путь, пройденный точкой, то производная $s'(t)$ есть мгновенная скорость в момент времени t. Аналогично производная скорости — ускорение. В общем случае производная характеризует скорость изменения величины.

Уравнение касательной. Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 задаётся уравнением

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ перпендикулярно касательной, называется нормалью; её угловой коэффициент равен $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$ при $f'(x_0) \neq 0$.

6. Правила дифференцирования

Пусть u и v — дифференцируемые функции, c — постоянная. Тогда справедливы формулы:

- производная суммы и разности: $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
- вынесение постоянного множителя: $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;
- производная произведения: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
- производная частного: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ при $v \neq 0$.

7. Производные основных элементарных функций

$$(c)' = 0, \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad (e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

8. Производная композиции и обратной функции

Производная сложной функции. Если $y = f(g(x))$, где f и g дифференцируемы, то

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Пример: $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x$.

Производная обратной функции. Если $y = f(x)$ — строго монотонная и дифференцируемая функция и $f'(x) \neq 0$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема и

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Именно из этой формулы выводятся производные обратных тригонометрических функций: например, для $y = \arcsin x$, обратной к $x = \sin y$, получаем $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. Применение производной к исследованию функций и построению графиков

Схема исследования функции $y = f(x)$:

1. **Область определения** функции.
2. **Чётность, нечётность, периодичность.** Если $f(-x) = f(x)$ — функция чётна (график симметричен относительно оси ординат), если $f(-x) = -f(x)$ — нечётна (симметрия относительно начала координат).
3. **Точки пересечения** с осями координат, промежутки знакопостоянства.
4. **Промежутки монотонности и экстремумы.** Необходимое условие экстремума: если x_0 — точка экстремума и функция дифференцируема, то $f'(x_0) = 0$ (стационарная точка). Достаточное условие: если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «−», то x_0 — точка максимума; с «−» на «+» — точка минимума. На промежутках, где $f'(x) > 0$, функция возрастает, где $f'(x) < 0$ — убывает.
5. **Выпуклость и точки перегиба** (по второй производной — см. пункт 11).
6. **Асимптоты** и предельное поведение.
7. **Построение графика** по результатам исследования.

Пример. Для функции $y = x^3 - 3x$: $y' = 3x^2 - 3 = 0$, откуда $x = \pm 1$; $x = -1$ — точка максимума $(y = 2)$, $x = 1$ — точка минимума $(y = -2)$; функция возрастает на $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $[-1; 1]$.

10. Наилучшее решение в прикладных задачах

Производная — основной инструмент задач на оптимум: наибольшее или наименьшее значение величины достигается либо на границе промежутка, либо в критической точке, где производная равна нулю или не существует.

Пример 1 (геометрия). Из квадратного листа картона со стороной a требуется изготовить открытую коробку наибольшего объёма, отрезав по углам квадраты со стороной x и загнув края. Объём $V(x) = x(a - 2x)^2$, $0 < x < \dfrac{a}{2}$. Уравнение $V'(x) = (a - 2x)(a - 6x) = 0$ даёт $x = \dfrac{a}{6}$ — искомое решение, $V_{\max} = \dfrac{2a^3}{27}$.

Пример 2 (экономика). Пусть прибыль от реализации n единиц продукции описывается функцией $P(n) = -n^2 + 200n - 1000$. Тогда $P'(n) = -2n + 200 = 0$, откуда оптимальный объём выпуска $n = 100$ и максимальная прибыль $P(100) = 9000$.

Методика решения таких задач: составить функцию (целевую), найти её производную, определить критические точки внутри допустимой области, отобрать точку наибольшего (наименьшего) значения и проверить её по знаку производной.

11. Вторая производная

Определение. Второй производной называется производная от производной: $f''(x) = (f'(x))'$.

Физический смысл. Вторая производная от пути по времени есть ускорение движущейся точки: $a(t) = s''(t)$. Например, при равноускоренном движении $s(t) = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + s_0$ вторая производная постоянна и равна a.

Геометрический смысл. Вторая производная характеризует выпуклость графика: если $f''(x) > 0$ на промежутке, график выпуклый вниз (вогнутость вверх), если $f''(x) < 0$ — выпуклый вверх. Точки, в которых $f''(x) = 0$ и вторая производная меняет знак, называются точками перегиба. Кроме того, $f''(x_0) > 0$ в стационарной точке — признак минимума, $f''(x_0) < 0$ — признак максимума.

Нахождение скорости по формуле и графику. Если процесс задан формулой $s(t)$, скорость находится дифференцированием: $v(t) = s'(t)$. Если процесс задан графиком $s(t)$, скорость в момент t_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику в точке t_0; на участках прямолинейного изменения пути скорость равна угловому коэффициенту прямой. Например, для графика, на котором путь растёт линейно со скоростью 5 м/с на отрезке $[0; 2]$ и убывает со скоростью 3 м/с на $[2; 5]$, скорости равны $+5$ и -3 м/с соответственно.

12. Первообразная и интеграл

Определение. Функция F называется первообразной для функции f на промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$. Если F — первообразная для f, то любая первообразная имеет вид $F(x) + C$, где C — постоянная (основное свойство первообразных). Совокупность всех первообразных называется неопределённым интегралом:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Таблица основных первообразных:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

13. Определённый интеграл и площадь криволинейной трапеции

Определение. Определённым интегралом функции f по отрезку $[a;b]$ называется предел интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где отрезок $[a;b]$ разбит точками на части длиной Δx_i, ξ_i — произвольная точка i-й части, λ — наибольшая из длин Δx_i.

Геометрический смысл. Если $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$, то определённый интеграл равен площади криволинейной трапеции — фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$. Если функция отрицательна на части отрезка, площадь соответствующей фигуры берётся со знаком минус.

Свойства определённого интеграла: линейность $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$; аддитивность $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$; при перестановке пределов интеграл меняет знак.

14. Формула Ньютона—Лейбница

Теорема. Если F — любая первообразная функции f на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона—Лейбница связывает две фундаментальные операции математического анализа — дифференцирование и интегрирование — и сводит вычисление определённого интеграла к отысканию первообразной.

Пример. Площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 2x$: точки пересечения $x = 0$ и $x = 2$; на этом отрезке прямая лежит выше параболы, поэтому

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Пример из физики. Перемещение при известной скорости: $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$. Если $v(t) = 6t - 3$ на $[0;2]$, то $s = \int_0^2 (6t - 3)\,dt = \left(3t^2 - 3t\right) \Big|_0^2 = 12 - 6 = 6$ м.