ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 1. ТЕМА 1. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

1. Числовые последовательности. Предел функции. Свойства пределов

Числовая последовательность определяется как функция натурального аргумента: $x_n = f(n)$, где $n \in \mathbb{N}$. Последовательность может быть задана аналитически (формулой общего члена), рекуррентно либо перечислением первых членов. Важными характеристиками последовательности являются монотонность (возрастание/убывание) и ограниченность: последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если существует $M > 0$ такое, что $|x_n| \leq M$ для всех n.

Предел числовой последовательности $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ по определению (на языке ε-N) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Это формализует интуитивное представление о стремлении членов последовательности к значению A.

Предел функции в точке x_0 (по Коши): $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, справедливо $|f(x) - A| < \varepsilon$. Предел на бесконечности и бесконечные пределы формулируются аналогично с заменой окрестностей на соответствующие условия (например, $|x| > M$ или $|f(x)| > N$).

Основные свойства пределов (при условии существования пределов функций/последовательностей):

- Предел суммы равен сумме пределов: $\lim(f + g) = \lim f + \lim g$.
- Предел произведения равен произведению пределов: $\lim(f \cdot g) = (\lim f) \cdot (\lim g)$.
- Предел частного равен частному пределов (при условии, что предел знаменателя не равен нулю): $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$.
- Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim(c \cdot f) = c \cdot \lim f$.
- Если $f(x) \leq g(x)$ в окрестности точки x_0, то $\lim f(x) \leq \lim g(x)$.
- Теорема о двух милиционерах (сжатия): если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ и $\lim \varphi(x) = \lim \psi(x) = A$, то $\lim f(x) = A$.

Алгоритм вычисления предела последовательности или функции:

1. Проверить, является ли выражение элементарным и допускает ли прямое подставление значения аргумента (для функций) или анализ поведения при $n \to \infty$ (для последовательностей).
2. Если подстановка приводит к неопределённости, определить её тип: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ и т. д.
3. Применить соответствующие методы: разложение на множители, домножение на сопряжённое, использование эквивалентных бесконечно малых, применение замечательных пределов, логарифмирование для степенных неопределённостей.
4. При необходимости использовать теорему о сжатии или асимптотические оценки.
5. Проверить результат, используя численные подстановки близких значений или известные эталонные пределы.

2. Замечательные пределы, раскрытие неопределенностей

Первый замечательный предел: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Следствия: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2/2} = 1$. Эти пределы применяются при раскрытии неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ с тригонометрическими функциями.

Второй замечательный предел: $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Эквивалентная форма: $\lim_{t\to 0}(1 + t)^{1/t} = e$. Он служит основой для раскрытия неопределённостей типа 1^∞.

Раскрытие неопределённостей:

- $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$: часто эффективно применение правила Лопиталя (если функции дифференцируемы в окрестности точки и производные существуют). Алгоритм: проверить условия применимости, продифференцировать числитель и знаменатель, повторить при необходимости.
- $0 \cdot \infty$: преобразовать к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путём деления на обратное выражение.
- $\infty - \infty$: привести к общему знаменателю либо использовать асимптотические разложения.
- $1^\infty, 0^0, \infty^0$: использовать логарифмирование: если $y = f(x)^{g(x)}$, то $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$, далее найти предел логарифма и возвести e в полученную степень.

Примеры типовых преобразований:

- Для $\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ при $x \to 0$: домножить числитель и знаменатель на сопряжённое $\sqrt{x+4}+2$, чтобы получить $\frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \to \frac{1}{4}$.
- Для $(1 + \frac{2}{x})^x$ при $x \to \infty$: сделать замену $t = \frac{x}{2}$, тогда выражение примет вид $\left((1 + \frac{1}{t})^t\right)^2 \to e^2$.

3. Односторонние пределы, классификация точек разрыва

Односторонние пределы определяются как пределы функции при стремлении аргумента к точке слева ($x \to x_0^-$) или справа ($x \to x_0^+$). Формально: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, при котором для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$ (аналогично для правой окрестности).

Существование двустороннего предела $\lim_{x \to x_0} f(x)$ эквивалентно существованию и равенству односторонних пределов: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$. Если односторонние пределы существуют, но не равны, то двусторонний предел не существует, а в точке наблюдается разрыв.

Классификация точек разрыва:

- **Разрыв первого рода:** существуют конечные односторонние пределы $f(x_0^-)$ и $f(x_0^+)$, но они не равны либо не совпадают со значением функции в точке. Частный случай — устранимый разрыв, когда $f(x_0^-) = f(x_0^+) \neq f(x_0)$ (либо функция не определена в точке).
- **Разрыв второго рода:** хотя бы один из односторонних пределов не существует или является бесконечным (например, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$). К этому типу относятся бесконечные разрывы и осцилляции (например, функция $\sin \frac{1}{x}$ в нуле).

Алгоритм анализа непрерывности и классификации разрыва в точке x_0:

1. Вычислить $f(x_0)$, если функция определена в этой точке.
2. Найти левый предел $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.
3. Найти правый предел $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.
4. Сравнить полученные значения:
    - Если все три величины равны, функция непрерывна в точке.
    - Если односторонние пределы конечны и равны, но отличаются от $f(x_0)$ или функция не определена — устранимый разрыв.
    - Если односторонние пределы конечны, но не равны — разрыв первого рода (скачок).
    - Если хотя бы один предел бесконечен или не существует — разрыв второго рода.