ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

# ЛЕКЦИЯ 1. ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

## 1. Введение в теорию вероятностей

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений. Её предмет — математические модели экспериментов со случайным исходом (стохастических экспериментов). Ключевыми понятиями выступают: случайное событие, вероятность события, пространство элементарных исходов, случайная величина.

Комбинаторика служит фундаментальным инструментом теории вероятностей: она позволяет подсчитывать количество возможных исходов в конечных вероятностных пространствах, что необходимо для применения классического определения вероятности. Согласно классическому определению, если пространство элементарных исходов $\Omega$ конечно и все исходы равновозможны, то вероятность события $A$ вычисляется как:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $|A|$ — число исходов, благоприятствующих событию $A$, а $|\Omega|$ — общее число исходов.

Для корректного применения этой формулы требуется умение точно и без ошибок подсчитывать $|A|$ и $|\Omega|$. Именно здесь вступают в силу элементы комбинаторики: правила суммы и произведения, а также формулы для размещений, перестановок и сочетаний.

Правило суммы: если объект $A$ можно выбрать $m$ способами, а объект $B$ — $n$ способами, и выборы не пересекаются, то выбор «$A$ или $B$» возможен $m + n$ способами.
Правило произведения: если объект $A$ выбирается $m$ способами, а после каждого такого выбора объект $B$ выбирается $n$ способами, то пара $(A, B)$ выбирается $m \cdot n$ способами.

Эти правила лежат в основе всех комбинаторных формул и применяются при построении выборок из конечного множества.

## 2. Упорядоченные выборки (размещения). Перестановки

Пусть имеется множество из $n$ различных элементов. Рассмотрим выборку объёма $k$ ($1 \leq k \leq n$).

**Размещение из $n$ по $k$** — это упорядоченная выборка без повторений, в которой важен порядок следования элементов. Число таких размещений обозначается $A_n^k$ и вычисляется по формуле:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

**Алгоритм подсчёта числа размещений:**

1. Определить общее количество элементов $n$ и размер выборки $k$.
2. Проверить, что выборка упорядоченная и без повторений.
3. Применить формулу $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.
4. Вычислить значение, сокращая факториалы при необходимости.

**Пример.** Сколько существует способов выбрать и упорядочить 3 книги из 10 на полке?
Решение: $n = 10$, $k = 3$.

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

**Перестановки** — частный случай размещений при $k = n$, то есть упорядочивание всех $n$ элементов множества. Число перестановок обозначается $P_n$ и равно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

**Алгоритм подсчёта числа перестановок:**

1. Убедиться, что рассматриваются все $n$ элементов и важен их порядок.
2. Применить формулу $P_n = n!$.
3. Вычислить факториал, при необходимости используя таблицы или программные средства.

**Пример.** Сколькими способами можно расставить 5 различных книг на полке?
Решение: $P_5 = 5! = 120$.

Если в множестве есть повторяющиеся элементы, применяется формула для перестановок с повторениями:

$$P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!},$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ — количество элементов каждого типа.

### 3. Неупорядоченные выборки (сочетания)

**Сочетание из $n$ по $k$** — это неупорядоченная выборка объёма $k$ без повторений из $n$ элементов. Порядок элементов не важен. Число сочетаний обозначается $C_n^k$ или $\binom{n}{k}$ и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Связь с размещениями: каждое сочетание можно упорядочить $k!$ способами, поэтому:

$$A_n^k = C_n^k \cdot k! \quad \Rightarrow \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

**Алгоритм подсчёта числа сочетаний:**

1. Определить $n$ — общее количество элементов, $k$ — размер выборки.
2. Убедиться, что выборка неупорядоченная и без повторений.
3. Применить формулу $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, сокращая факториалы для упрощения вычислений.
4. При необходимости использовать свойства биномиальных коэффициентов (симметрия $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, рекуррентное соотношение и т. д.).

**Пример.** Сколькими способами можно выбрать 3 книги из 10 без учёта порядка?
Решение: $n = 10$, $k = 3$.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Свойства биномиальных коэффициентов, полезные для анализа и проверки:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;
- $\binom{n}{1} = n$;
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (симметрия);
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ (рекуррентная формула).

Эти свойства позволяют проверять корректность вычислений и упрощать расчёты в сложных задачах.