ЧАСТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕДЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

ЛЕКЦИЯ 2. ТЕМА 2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1. Логические операции. Формулы логики

Математическая логика оперирует высказываниями — утверждениями, принимающими одно из двух значений: «истина» (1) или «ложь» (0). Базовые логические операции:

- **Отрицание (¬)**: $\neg A$ истинно тогда и только тогда, когда A ложно.
- **Конъюнкция ($\wedge$)**: $A \wedge B$ истинна, если оба операнда истинны.
- **Дизъюнкция ($\vee$)**: $A \vee B$ истинна, если хотя бы один операнд истинен.
- **Импликация ($\rightarrow$)**: $A \rightarrow B$ ложна только при $A = 1, B = 0$.
- **Эквиваленция ($\leftrightarrow$)**: $A \leftrightarrow B$ истинна при совпадении значений операндов.
- **Строгая дизъюнкция (XOR, $\oplus$)**: истинна при несовпадении операндов.

Формулы логики строятся рекурсивно:

1. Любая пропозициональная переменная ($A, B, C, \ldots$) — формула.
2. Если F — формула, то $\neg F$ — формула.
3. Если F_1, F_2 — формулы, то $(F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \rightarrow F_2), (F_1 \leftrightarrow F_2)$ — формулы.
4. Других формул нет.

Алгоритм построения таблицы истинности для формулы:

1. Выписать все пропозициональные переменные.
2. Сгенерировать все 2^n комбинаций значений переменных (n — число переменных).
3. Последовательно вычислить значения подформул, начиная с базовых операций.
4. Записать итоговое значение формулы для каждой комбинации.

2. Законы логики. Равносильные преобразования

Равносильность формул F_1 и F_2 ($F_1 \equiv F_2$) означает совпадение их таблиц истинности. Базовые законы:

- **Законы коммутативности**: $A \wedge B \equiv B \wedge A, A \vee B \equiv B \vee A$.
- **Законы ассоциативности**: $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$.
- **Законы дистрибутивности**: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
- **Законы де Моргана**: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.
- **Закон двойного отрицания**: $\neg\neg A \equiv A$.
- **Законы поглощения**: $A \vee (A \wedge B) \equiv A, A \wedge (A \vee B) \equiv A$.

Алгоритм равносильных преобразований:

1. Заменить импликации и эквиваленции на базовые операции: $A \to B \equiv \neg A \vee B, A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.
2. Применить законы де Моргана для переноса отрицаний к переменным.
3. Устранить двойные отрицания.
4. Использовать дистрибутивность для приведения к ДНФ/КНФ.
5. Применить законы поглощения и упрощения.

3. Булевы функции

Булева функция от n переменных — отображение $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Количество различных булевых функций от n переменных: 2^{2^n}.

Способы задания:

- Таблица истинности.
- Формула логики.
- Вектор значений (последовательность значений функции на всех наборах переменных).

Пример: функция $f(A,B) = A \oplus B$ задаётся вектором $(0,1,1,0)$ при порядке наборов $(00,01,10,11)$.

4. Методы упрощения булевых функций

Метод карт Карно:

1. Построить карту Карно размером $2^k \times 2^m$ (для $k + m$ переменных).
2. Заполнить клетки значениями функции.
3. Объединить смежные клетки со значением 1 в прямоугольные области размером 2^i.
4. Для каждой области выписать конъюнкцию, исключая переменные, меняющие значение внутри области.
5. Объединить полученные конъюнкции дизъюнкцией.

Метод Квайна — Мак-Класки:

1. Представить функцию в виде СДНФ.
2. Провести склеивание элементарных конъюнкций по правилу $(A \wedge x) \vee (A \wedge \neg x) \equiv A$.
3. Исключить поглощаемые члены.
4. Построить импликантную таблицу и выбрать минимальное покрытие.

5. Основные классы функций. Полнота множества

Выделяют следующие замкнутые классы булевых функций:

- T_0: функции, сохраняющие 0 ($f(0, \ldots, 0) = 0$).
- T_1: функции, сохраняющие 1 ($f(1, \ldots, 1) = 1$).
- S: самодвойственные функции ($f(x_1, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$).
- M: монотонные функции (при увеличении аргументов значение не уменьшается).
- L: линейные функции (представимы полиномом Жегалкина степени не выше 1).

Множество функций полно, если с его помощью можно выразить любую булеву функцию.

6. Операция двоичного сложения. Многочлен Жегалкина

Операция $\oplus$ (сложение по модулю 2) обладает свойствами:

- Коммутативность: $a \oplus b = b \oplus a$.
- Ассоциативность: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.
- Нейтральный элемент: $a \oplus 0 = a$.
- Обратный элемент: $a \oplus a = 0$.

Многочлен Жегалкина — представление булевой функции в виде полинома над полем $\mathbb{F}_2$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus \bigoplus_i a_i x_i \oplus \bigoplus_{i<j} a_{ij} x_i x_j \oplus \cdots \oplus a_{1\ldots n} x_1 \ldots x_n,$$

где $a_i \in \{0, 1\}$.

Алгоритм построения многочлена Жегалкина:

1. Составить таблицу истинности функции.
2. Использовать метод неопределённых коэффициентов: подставить все наборы значений и решить систему уравнений над $\mathbb{F}_2$.
3. Либо применить метод треугольника (преобразование таблицы истинности в коэффициенты полинома).

7. Основные классы функций. Полнота множества. Теорема Поста

Теорема Поста: система булевых функций полна тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из классов T_0, T_1, S, M, L.

Следствие: для проверки полноты достаточно убедиться, что в системе есть хотя бы одна функция, не принадлежащая каждому из этих классов.

Примеры полных систем:

- $\{\wedge, \vee, \neg\}$ (классическая булева алгебра).
- $\{\wedge, \oplus, 1\}$ (полиномы Жегалкина).
- $\{\downarrow\}$ (стрелка Пирса), $\{|\}$ (штрих Шеффера).

8. Предикат. Операции над предикатами

Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, принимающая значения в множестве $\{0, 1\}$, определённая на некотором множестве M. Предикаты обобщают высказывания, добавляя переменные.

Операции над предикатами:

- Логические операции ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) применяются поточечно.
- Кванторы:
  - $\forall x P(x)$ — истинно, если $P(x)$ истинно для всех $x \in M$.
  - $\exists x P(x)$ — истинно, если существует $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно.

Алгоритмы работы с предикатами:

1. Для проверки истинности кванторных формул перебрать все элементы предметной области (для конечных множеств).
2. Для упрощения использовать равносильные преобразования с кванторами: $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$, $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$.
3. Привести формулу к предваренной нормальной форме (все кванторы в начале формулы).